

DIKTAT
ALJABAR LINEAR
(MKK 303)



Disusun Oleh:
I GUSTI NGURAH PUTU TENAYA, ST., MT.

**JURUSAN TEKNIK MESIN
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS UDAYANA
2016**

KATA PENGANTAR

Suatu hal biasa jika terdengar ungkapan bahwa mata kuliah aljabar linear adalah mata kuliah yang sulit. Ungkapan ini tidak selamanya benar karena mata kuliah aljabar linear justru bisa menjadi mata kuliah yang mudah, menarik, dan menantang kreativitas berpikir. Sulitnya mata kuliah aljabar linear sebenarnya disebabkan oleh beberapa faktor, di antaranya cara penyajian. Cara penyajian baik secara lisan maupun tulisan, sangat berpengaruh terhadap mudah atau tidaknya mata kuliah aljabar linear diserap.

Belajar aljabar linear bukanlah beban yang harus dipikul mahasiswa, terutama untuk menghafal rumus-rumusnya. Namun, belajar aljabar linear lebih ditekankan pada pemahaman konsep-konsep, kelancaran berprosedur dan penalaran adaptif.

Berdasarkan hal tersebut, penulis mencoba mewujudkan pemikiran tentang konsep penyajian mata kuliah aljabar linear yang mudah dan terarah dalam diktat mata kuliah aljabar linear untuk mahasiswa Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Udayana. Dengan demikian, diharapkan mahasiswa dapat dengan mudah mempelajari aljabar linear dan menjadikan mata kuliah aljabar linear sebagai mata kuliah favorit. Untuk mencapai tujuan ini, penulis menyajikan pelajaran secara komunikatif yang mengacu pada fenomena mutakhir dan keseharian mahasiswa. Materi pelajaran tersaji dengan bahasa yang sederhana dan dimulai dari materi yang mudah hingga materi yang sulit. Tentu saja materi pelajaran disertai dengan contoh-contoh soal yang disertai dengan penyelesaiannya dan tugas-tugas.

Materi pelajaran dalam diktat aljabar linear untuk mahasiswa Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Udayana merupakan materi dasar yang akan berguna untuk kita. Oleh karena itu, mahasiswa hendaknya benar-benar cermat mempelajarinya karena merupakan kunci untuk mempermudah mempelajari mata kuliah selanjutnya. Jadi, persiapkanlah diri sebaik mungkin dan buanglah perasaan bahwa mata kuliah aljabar linear adalah mata kuliah yang sulit.

Akhir kata, penulis berharap diktat ini benar-benar berguna sebagai pemandu mempelajari mata kuliah aljabar linear secara mudah. Aljabar linear akan bisa dikuasai jika biasa belajar dan berlatih. Selamat belajar dan semoga berhasil.

Bukit Jimbaran, Maret 2016
Jurusan Teknik Mesin FT UNUD

Penyusun,

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	2
DAFTAR ISI	3
BAB I Matriks	5
1.1 Pengertian Matriks.....	5
1.2 Jenis-Jenis Matriks Khusus	8
1.3 Kesamaan Dua Matriks	13
1.4 Operasi Aljabar Pada Matriks	15
1.5 Transpose Matriks	23
1.6 Transformasi atau Operasi Elementer Pada Baris dan Kolom Suatu Matriks	24
1.7 Matriks Ekivalen	27
1.8 Latihan Soal- Soal	29
BAB II DETERMINAN	31
2.1 Pengertian Determinan	31
2.2 Menentukan Harga Determinan	31
2.3 Sifat-Sifat Determinan	40
2.4 Latihan Soa-Soal	44
BAB III INVERS MATRIKS	45
3.1 Pengertian Invers Matriks	45
3.2 Menentukan Invers Matriks	45
3.3 Latihan Soal_Soal	53
BAB IV SISTEM PERSAMAAN LINIER	55
4.1 Pengertian Sistem Persamaan Linear	55

4.2	Metode Eliminasi Gauss	56
4.3	Metode Operasi Baris Elemen	58
4.4	Metode Cramer	60
4.5	Metode Invers Matriks	67
4.6	Latihan Soal-Soal	71
DAFTAR PUSTAKA		98
LAMPIRAN		99

BAB I

MATRIKS

1.1 Pengertian Matriks

Banyak informasi yang sering disajikan dalam bentuk tabel, diantaranya klasemen sementara dari kejuaraan, data rekening telepon, data tagihan listrik, data tabungan, data harga penjualan barang, data absensi siswa dan lain-lain. Sebagai ilustrasi awal untuk memahami pengertian matriks, pelajari uraian berikut.

Diketahui data kunjungan wisatawan, baik domestik maupun asing di suatu objek wisata selama empat bulan berturut-turut, disajikan dalam tabel berikut (dalam ribuan).

Tabel 1.1. Jumlah kunjungan wisatawan domestik dan asing

Bulan		I	II	III	IV
Wisatawan					
Domestik		7	6	8	6
Asing		1	2	1	3

Berdasarkan tabel 1.1, anda pasti memperhatikan setiap keterangan yang ada yang terkait dengan jumlah wisatawan domestik maupun asing dalam bentuk angka yang tertera pada tabel yang disusun letaknya berdasarkan baris dan kolom. Tabel yang baru anda baca dapat disederhanakan dengan menghilangkan keterangan-keterangan yang terdapat pada tabel dan mengganti tabel dengan tanda kurung seperti berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kini data yang telah diubah bentuknya hanya terdiri atas bilangan-bilangan yang disusun menurut baris dan kolom. Bentuk baru seperti inilah yang dinamakan sebagai matriks. **Jadi matriks merupakan kumpulan bilangan yang tersusun menurut baris dan kolom sedemikian sehingga tampak seperti bentuk sebuah persegi panjang atau bujur sangkar.**

Sebuah matriks memuat tanda kurung sebagai pembatas. Tanda kurung yang digunakan dapat berupa tanda kurung biasa ataupun tanda kurung siku. Pada umumnya matriks diberi nama dengan memakai huruf kapital seperti A, B, C. Bilangan-bilangan yang menyusun sebuah matriks dinamakan unsur atau anggota dari matriks tersebut dan dinotasikan dengan huruf kecil berindeks yang menyatakan letak dari unsur tersebut dalam matriks (baris dan kolom). Perhatikan kembali matriks pada **uraian sebelumnya**. Misalkan matriks tersebut adalah matriks A maka:

$$[A] = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Pada matriks A, yang dimaksud dengan a_{23} adalah unsur dari matriks A yang berada pada baris kedua dan kolom ketiga, yaitu I. Jika kita perhatikan, matriks A terdiri atas 2 buah baris dan 4 buah kolom. Banyaknya baris dan kolom yang menyusun sebuah matriks dinamakan sebagai ordo atau ukuran matriks. Sehingga matriks A disebut sebagai matriks berordo atau berukuran 2×4 .

Secara umum, matriks dengan m baris dan n kolom dapat disajikan sebagai berikut.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{Baris 1} \\ \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{Baris 2} \\ \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{Baris 3} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{Baris } m \end{array}$$

↓ ↓ ↓

klm 1 klm 3 klm n

Masing-masing n-triple horisontal seperti: $[a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}]$, $[a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}]$, $[a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n}]$, dan $[a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}]$, disebut baris matriks, sedangkan m-triple vertical seperti:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

disebut kolom-kolom matriks.

Secara sederhana, matriks di atas ditulis $[A] = [a_{ij}]$. Matriks di atas mempunyai m buah baris dan n buah kolom, dikatakan ukuran matriks tersebut adalah $(m \times n)$. Apabila $m = n$, maka matriks itu disebut matriks bujur sangkar.

Contoh:

Diketahui matriks:

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- a. ordo $[B]$.
- b. b_{12} dan b_{23} .
- c. banyaknya elemen pada $[B]$.

Jawab:

- a. Ordo dari $[B]$ adalah 2×3 karena $[B]$ terdiri dari 2 baris dan 3 kolom.
- b. b_{12} artinya unsur $[B]$ yang terletak pada baris ke-1 dan kolom ke-2 sehingga $b_{12} = -4$.
 b_{23} artinya unsur $[B]$ yang terletak pada baris ke-2 dan kolom ke-3 sehingga $b_{23} = -2$.
- c. $[B]$ memiliki 6 elemen yaitu 2, -4, 3, 5, 1 dan -2.

1.2 Jenis-Jenis Matriks Khusus

Agar anda lebih memahami mengenai jenis matriks tersebut perhatikan uraian materi berikut.

a. Matriks Nol

Matriks nol ialah matriks yang semua elemennya bernilai nol.

Contoh:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [C] = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Semua unsur pada $[A]$, $[B]$, dan $[C]$ adalah angka 0, sehingga disebut sebagai matriks nol.

Sifat-sifat matriks nol :

- a. $[A] + [0] = [A]$ bila ukuran $[A] =$ ukuran $[0]$
- b. $[A][0] = [0]; [0][A] = [0]$ kalau syarat-syarat perkalian terpenuhi

b. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri atas satu baris saja.

Contoh:

$$[D] = [-3 \ 2] \quad [E] = [5 \ 0 \ 2] \quad [F] = [3 \ 4 \ -5 \ 2]$$

$[D]$ berordo 1×2 , $[E]$ berordo 1×3 , dan $[F]$ berordo 1×4 . $[D]$, $[E]$, dan $[F]$ di atas hanya memiliki satu baris saja sehingga disebut sebagai matriks baris.

c. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri atas satu kolom saja.

Contoh:

$$[G] = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

[G] berordo 2×1 , [H] berordo 3×1 , dan [I] berordo 4×1 . [G], [H], dan [I] di atas hanya memiliki satu kolom saja sehingga disebut sebagai matriks kolom.

d. Matriks Persegi atau Matriks Bujur Sangkar

Matriks persegi atau matriks bujur sangkar adalah matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya.

Contoh:

$$[J] = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 5 \\ 3 & 8 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

[J] berordo 2×2 dan [K] berordo 3×3 .

Karena [J] dan [K] banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya, maka [J] dan [K] disebut sebagai matriks persegi atau matriks bujur sangkar.

e. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di bawah diagonal utamanya sama dengan 0. Dengan perkataan lain [A] adalah matriks segitiga atas bila $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$.

Contoh:

$$[L] = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 5 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 5 & 5 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

f. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen diatas diagonal utamanya **sama** dengan 0. Dengan perkataan lain [A] adalah matriks segitiga atas bila $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$.

Contoh:

$$[N] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [O] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

g. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utamanya **sama** dengan nol. Dengan perkataan lain [A] adalah matriks diagonal bila $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Contoh :

$$[P] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

h. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks **diagonal** yang elemen-elemen diagonal utamanya **sama** dengan 1, dengan perkataan lain [A] adalah matriks identitas bila $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$, dan $a_{ij} \neq 0$ bila $i \neq j$. Matriks identitas biasa ditulis [I].

Contoh :

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat matriks identitas adalah seperti bilangan 1 (satu) dalam operasi-operasi dengan bilangan biasa, yaitu :

$$[A][I] = [I][A] = [A] \quad (\text{bila syarat-syarat perkalian terpenuhi}).$$

i. Matriks Skalar

Matriks skalar ialah matriks diagonal dengan semua elemen diagonal utamanya sama dengan k. Matriks I adalah bentuk khusus dari matriks skalar, dengan k = 1

Contoh :

$$[T] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks skalar, dapat dituliskan pula sebagai $4[I] =$

$$4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

j. Matrik Invers

Kalau $[A]$ dan $[B]$ matriks-matriks bujur sangkar berordo $m \times n$ dan berlaku $[A][B] = [B][A] = [I]$ maka dikatakan $[B]$ invers dari $[A]$ dan ditulis $[B] = [A^{-1}]$, sebaliknya $[A]$ adalah invers dari $[B]$, dan ditulis $[A] = [B^{-1}]$

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Mempunyai } [A^{-1}] = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Karena } [A][A^{-1}] = [A^{-1}][A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k. Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks bujur sangkar yang transposenya sama dengan dirinya sendiri. Dengan perkataan lain bila $[A] = [A^T]$ atau $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j.

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [A^T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena $[A] = [A^T]$ maka $[A]$ adalah matriks simetris.

I. Matriks Antisimetris

Matriks antisimetris adalah matriks yang transposenya adalah negatifnya. Dengan perkataan lain bila $[A^T] = -[A]$ atau $a_{ij} = -a_{ji}$ untuk semua i dan j. Mudah dipahami bahwa semua elemen diagonal utama matriks antisimetris adalah = 0

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A^T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -[A]$$

m. Matriks Komutatif

Kalau $[A]$ dan $[B]$ adalah matriks bujur sangkar dan berlaku $[A][B] = [B][A]$, maka $[A]$ dan $[B]$ dikatakan berkomutatif satu sama lain. Jelas bahwa setiap matriks bujur sangkar berkomutatif dengan $[I]$ (yang ukurannya sama) dan dengan inversnya (bila ada).

Kalau $[A][B] = -[B][A]$, dikatakan antikomutatif.

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{dikatakan berkomutatif karena}$$

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \text{ sedangkan}$$

$$[B][A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

TUGAS 1.

Diskusikan dengan teman anda.

1. Apakah matriks persegi merupakan matriks diagonal?, berikan alasannya.
2. Apakah matriks diagonal merupakan matriks persegi?, berikan alasannya.

1.3 Kesamaan Dua Matriks

Dalam matriks dikenal adanya kesamaan dua matriks yang didefinisikan sebagai berikut. Dua matriks dikatakan sama jika ordo yang dimiliki keduanya sama, dan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak) sama.

Cantoh:

Diketahui matriks-matriks sebagai berikut:

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tentukan apakah:

- a. $[A] = [B]$,
- b. $[A] = [C]$,
- c. $[A] = [D]$.

Jawab:

- a. $[A] \neq [B]$ karena ordo $[A]$ tidak sama dengan ordo $[B]$.
- b. $[A] = [C]$ karena ordo $[A]$ sama dengan ordo $[C]$ dan elemen-elemen yang bersesuaian pada $[A]$ sama dengan elemen-elemen pada $[C]$.
- c. $[A] \neq [D]$ karena ordo $[A]$ memang sama dengan ordo $[D]$ tetapi elemen-elemen yang bersesuaian pada kedua matriks tersebut ada yang tidak sama, yaitu $a_{22} \neq d_{22}$.

Contoh

Diketahui persamaan matriks:

$$[A] = \begin{bmatrix} x+y & 2x+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Apabila $[A] = [B]$ maka tentukan nilai x, y, z dan w .

Jawab:

$$[A] = [B]$$

$$\begin{bmatrix} x+y & 2x+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi 4 buah persamaan:

$$x+y = 3, \quad 2x+w = 5$$

$$x - y = 1; \quad z - w = 4$$

dan bila diselesaikan menghasilkan $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$ dan $w = -1$.

1.4 Operasi Aljabar Pada Matriks

Pada sub bab sebelumnya, telah dipelajari mengenai pengertian, jenis-jenis dan kesamaan dari suatu matriks. Pelajaran selanjutnya pada sub bab ini adalah operasi aljabar pada matriks. Jadi sama seperti pada bilangan, pada matriks pun berlaku sifat-sifat operasi aljabar.

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila ordo dari kedua matriks tersebut sama. Operasi penjumlahan dan pengurangan pada matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak).

Jika $[A] = (a_{ij})$ dan $[B] = (b_{ij})$ matriks-matriks berukuran sama, maka $[A] + [B]$ adalah suatu matriks $[C] = (c_{ij})$ dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j . atau $[A] + [B] = (a_{ij} + b_{ij})$

Contoh:

1. Diketahui:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$[A] + [B] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 & 1+2 \\ 4+1 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[A] - [B] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-0 & 1-2 \\ 4-1 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Diketahui:

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$[A] + [C] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[A] - [B]$ pada $[A]$ dan $[B]$ tidak dapat dilakukan operasi pengurangan atau penjumlahan karena ordo matriks $[A]$ tidak sama dengan ordo $[B]$.

TUGAS 2.

Diskusikan dengan teman anda.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [C] = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

Hitung:

- a. $[A] + [B]$
- b. $[B] + [A]$
- c. $[A] - [B]$
- d. $[B] - [A]$
- e. $[B] + [C]$
- f. $\{[A] + [B]\} + [C]$
- g. $[A] + \{[B] + [C]\}$

Dari hasil yang anda peroleh, apa yang dapat anda simpulkan?

b. Perkalian Skalar Terhadap Matriks

Jika $[A]$ adalah suatu matriks dan k adalah bilangan riil maka $k[A]$ adalah matriks baru yang elemen-elemennya diperoleh dari hasil perkalian k dengan setiap elemen pada matriks $[A]$.

Contoh;

Diketahui:

$$[B] = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

Maka:

$$3[B] = 3 \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot -5 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot -2 & 3 \cdot -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -15 & 3 \\ 6 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}[B] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

TUGAS 3.

Diskusikan dengan teman anda.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad p = 2 \quad \text{dan} \quad q = 3$$

Hitung:

- a. $(p + q)[A]$
- b. $p[A] + q[A]$
- c. $p\{[A] + [B]\}$
- d. $p[A] + p[B]$
- e. $p\{q[A]\}$
- f. $\{pq\}[A]$

Dari hasil yang anda peroleh, apa yang dapat anda simpulkan?

c. Perkalian Matriks

Pada perkalian $[A][B]$, dimana $[A]$ kita sebut sebagai matriks pertama dan $[B]$ kita sebut sebagai matriks kedua.

Syarat perkalian matriks adalah banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris matriks kedua.

Elemen-elemen pada $[A][B]$ diperoleh dari penjumlahan hasil kali elemen baris pada $[A]$ dengan elemen kolom pada $[B]$.

Definisi:

Pandangan $[A] = (a_{ij})$ berukuran $(p \times q)$ dan $[B] = (b_{ij})$ berukuran $(q \times r)$.

Maka perkalian $[A][B]$ adalah suatu $[C] = (c_{ij})$ berukuran $(p \times r)$ dimana:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj}$$

untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, p$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, r$.

Sebagai contoh diberikan $[A]$ dan $[B]$ sebagai berikut:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qr} \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } [A][B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qr} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pr} \end{bmatrix}$$

Dimana:

c_{11} = elemen baris pertama dan kolom pertama dari perkalian [A] dengan [B].

= semua elemen baris pertama [A] dikalikan dengan semua elemen kolom pertama [B].

$$= [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1q}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{q1} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1q}b_{q1}$$

c_{12} = elemen baris pertama dan kolom kedua dari perkalian [A] dengan [B]

= semua elemen baris pertama [A] dikalikan dengan semua elemen kolom kedua [B].

$$= [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1q}] \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{q2} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1q}b_{q2}$$

c_{1r} = elemen baris pertama dan kolom ke-r dari perkalian [A] dengan [B].

= semua elemen baris pertama [A] dikalikan dengan semua elemen kolom ke-r [B].

$$= [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1q}] \begin{bmatrix} b_{1r} \\ b_{2r} \\ \vdots \\ b_{qr} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}b_{1r} + a_{12}b_{2r} + \dots + a_{1q}b_{qr}$$

Sehingga dengan cara yang sama, maka:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2q}b_{q1}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2q}b_{q2}$$

$$c_{2r} = a_{21}b_{1r} + a_{22}b_{2r} + \dots + a_{2q}b_{qr}$$

$$c_{p1} = a_{p1}b_{11} + a_{p2}b_{21} + \dots + a_{pq}b_{q1}$$

$$c_{p2} = a_{p1}b_{12} + a_{p2}b_{22} + \dots + a_{pq}b_{q2}$$

$$c_{pr} = a_{p1}b_{1r} + a_{p2}b_{2r} + \dots + a_{pq}b_{qr}$$

Contoh

Diketahui:

$$[P] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad [Q] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- a. $[P][Q]$
- b. $[Q][P]$
- c. $[P][R]$
- d. $[R][P]$

Jawab:

$$\text{a. } [P][Q] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 + 3.-1 & 2.2 + 3.2 \\ -4.3 + 5.-1 & -4.2 + 5.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 - 3 & 4 + 6 \\ -12 - 5 & -8 + 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -17 & 2 \end{bmatrix}$$

b. $[Q] [P] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 8 & 9 + 10 \\ -2 - 8 & -3 + 10 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 16 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$$

c. $[P] [R] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 12 & 0 - 6 & -2 - 9 \\ -4 + 20 & 0 - 10 & 4 - 15 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -6 & -11 \\ 16 & -10 & -11 \end{bmatrix}$$

d. $[R][P] =$ tidak ada karena banyaknya kolom pada $[R]$ tidak sama dengan banyaknya baris pada $[P]$.

TUGAS 4.

Diskusikan dengan teman anda.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } [C] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Hitung:

- a. $[A] [B]$ dan $[B] [A]$
- b. $\{[A][B]\}[C]$ dan $[A]\{[B][C]\}$
- c. $[A]\{[B] + [C]\}$ dan $[A][B] + [A][C]$
- d. $\{[A] + [B]\}[C]$ dan $[A][C] + [B][C]$

Dari hasil yang anda peroleh, apa yang dapat anda simpulkan?

d. Perpangkatan Matriks Persegi

Sifat perpangkatan pada matriks, sama halnya seperti sifat perpangkatan pada bilangan-bilangan.

Untuk setiap bilangan riil (a), berlaku:

$$a^2 = a \times a$$

$$a^3 = a \times a \times a$$

dst

Pada matriks persegi juga berlaku hal yang sama seperti:

$$[A]^2 = [A][A]$$

$$[A]^3 = [A][A][A] = [A]^2 [A] = [A][A]^2$$

dst

Contoh:

Diketahui:

$$[B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

Tentukan:

a. $[B]^2$

b. $[B]^3$

Jawab:

a. $[B]^2 = [B][B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

b. $[B]^3 = [B][B]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$$= [B]^2 [B] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

1.5 Transpose Matriks

Dalam sebuah $[A]$ dimana $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Setiap baris dari $[A]$ dapat diubah menjadi kolom dan juga sebaliknya setiap kolom dari $[A]$ menjadi baris dari suatu matriks yang baru misalnya $[B]$, maka $[B]$ disebut transpose dari $[A]$, ditulis:

$$[B] = [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cantoh:

Diketahui:

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- a. $[A]^T$
- b. $[B]^T$

Jawab:

$$\text{a. } [A]^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } [B]^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Beberapa sifat matriks transpose yaitu:

- a. $\{[A] + [B]\}^T = [A]^T + [B]^T$
- b. $\{[A]^T\}^T = [A]$
- c. $k[A]^T = [kA]^T$
- d. $\{[A][B]\}^T = [B]^T [A]^T$

1.6 Transformasi atau Operasi Elementer Pada Baris dan Kolom Suatu Matriks

Yang dimaksud dengan transformasi atau operasi elementer pada baris dan kolom suatu matriks adalah sebagai berikut:

- a. Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j dari $[A]$. Atau baris ke-i dijadikan baris ke-j dan baris ke-j dijadikan baris ke-I dari $[A]$.

Ditulis : $H_{ij} [A]$

- b. Penukaran tempat kolom ke-i dan kolom ke-j dari $[A]$. Atau kolom ke-i dijadikan kolom ke-j dan baris ke-j dijadikan baris ke-I dari $[A]$.

Ditulis : $K_{ij} [A]$

- c. Memperkalikan baris ke-i dari $[A]$ dengan skalar $\neq 0$.

Ditulis : $H_i^{()} [A]$

- d. Memperkalikan kolom ke-i dari $[A]$ dengan skalar $\neq 0$.

Ditulis : $K_i^{()} [A]$

- e. Menambah baris ke-i dengan kali baris ke-j dari $[B]$.

Ditulis : $H_{ij}^{()}[B]$

- f. Menambah kolom ke-i dengan kali kolom ke-j dari $[B]$.

Ditulis : $K_{ij}^{()}[B]$

g. Menambah i_1 kali baris ke- i dengan i_2 kali baris ke- j dari [A].

$$\text{Ditulis : } \mathbf{H}_i^{(1)} i_j^{(2)} [\mathbf{A}]$$

h. Menambah i_1 kali kolom ke- i dengan i_2 kali kolom ke- j dari [A].

$$\text{Ditulis : } \mathbf{K}_i^{(1)} j^{(2)} [\mathbf{A}]$$

Contoh:

Diketahui:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$\mathbf{a.} \quad H_{23}[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad H_{12}[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b.} \quad K_{13}[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad K_{23}[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c.} \quad H_2^{(-2)}[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad H_1^{(1/2)}[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d.} \quad K_3^{(2)}[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad K_1^{(-1)}[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e.} \quad H_{31}^{(1)} [A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad H_{23}^{(-1)} [A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f.} \quad K_{23}^{(-2)} [A] = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad K_{21}^{(2)} [B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g.} \quad H_2^{(2)} {}_3^{(1)} [A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h.} \quad K_2^{(2)} {}_3^{(3)} [A] = \begin{bmatrix} 3 & 14 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Misalnya kita telah mengetahui $[B]$ sebagai hasil transformasi elementer dari $[A]$. Kita dapat mencari $[A]$ dengan cara mencari invers dari transformasi elementer tersebut.

Contoh :

$$\text{Misalkan: } [B] = H_{31}^{(1)} ([A]) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka: } [A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = H_{31}^{(1)-1} [B]$$

Jadi:

Invers suatu transformasi elementer juga suatu transformasi elementer. Dapat dirumuskan sebagai berikut:

- a. $[A] = H_{ij}^{-1} [B] = H_{ij} [B]$
- b. $[A] = K_{ij}^{-1} [B] = K_{ij} [B]$
- c. $[A] = H_j^{(-1)} [B] = H_j^{(1/-)} [B]$
- d. $[A] = K_i^{(-1)} [B] = K_i^{(1/-)} [B]$
- e. $[A] = H_{ij}^{(-1)} [B] = H_{ij}^{(-)} [B]$
- f. $[A] = K_{ij}^{(-1)} [B] = K_{ij}^{(-)} [B]$

Contoh:

$$\text{a. Kalau } [B] = H_{23}^{(1)} [A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } [A] = H_{23}^{(1)^{-1}} [B] = H_{23}^{(-1)} [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. Kalau } [A] = H_3^{(4)} [B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } [B] = H_3^{(4)^{-1}} [A] = H_3^{(1/4)} [A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1.7 Matriks Ekivalen

Dua $[A]$ dan $[B]$ disebut ekivalen $[A] \sim [B]$ apabila salah satunya dapat diperoleh dari yang lain dengan transformasi-transformasi elementer terhadap baris

dan atau kolom. Kalau transformasi-transformasinya elementernya hanya pada baris saja, dikatakan ekivalen baris, Kalau transformasi-transformasinya hanya pada kolom saja, dikatakan ekivalen kolom.

Contoh :

$$\text{a. } [A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } [B] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

[A] adalah ekivalen baris dengan [B]

Karena : $[B] = H_{12}[A]$

$$\text{b. } [A] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } [B] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

[A] adalah ekivalen dengan [B]

Karena:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = K_{12}^{(-1)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = K_{42}^{(-2)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = H_{12} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = H_{12} [B]$$

1.8 Latihan Soal

Kerjakan soal-soal berikut:

- Diketahui matriks sebagai berikut.

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- Ordo [A]
- Elemen-elemen pada kolom ketiga [A]
- Nilai dari a_{21} dan a_{34}

- Diketahui:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3p & 2 \\ 4 & -5q \end{bmatrix} \text{ dan } [B] = \begin{bmatrix} 4+8 & 2 \\ 4 & 30 \end{bmatrix}$$

Jika $[A] = [B]$, tentukan nilai $p + q$

- Diketahui kesamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ b & 2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2a & 2 & ab \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai $a + b + c$

- Tentukan matriks transpose dari matrik-matrik berikut.

$$a. [D] = \begin{bmatrix} 5 & 2a & 3 \\ b & 2 & d \end{bmatrix}$$

$$b. [Q] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

- Diketahui.

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } [L] = \begin{bmatrix} 3 & -2x & 2 \\ 4 & -x+y & 6 \end{bmatrix}$$

Jika $[K] = [L]^T$, tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan berikut.

6. Diketahui.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- | | |
|-----------------|------------------|
| a. $3[A]$ | c. $3[A] - [B]$ |
| b. $[A] + 2[B]$ | d. $3[B] - 2[A]$ |

7. Diketahui.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- | | |
|-------------------|-------------------------------|
| a. $[A][B]$ | f. $H_{12}[A]$ |
| b. $[A]^T$ | g. $K_{23}[B]$ |
| c. $[B]^T$ | h. $H_{23}^{(-2)}[B]$ |
| d. $\{[A][B]\}^T$ | i. $K_3^{(-1)}[A]$ |
| e. $[B]^T [A]^T$ | j. $H_3^{(2)} {}_2^{(-1)}[B]$ |

8. Carilah harga x, y, z dan u bila:

$$3 \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y+1 \\ 5 & z+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2+y \\ z & 4 \end{bmatrix}$$

BAB II

DETERMINAN

2.1 Pengertian Determinan

Determinan adalah sekumpulan elemen-elemen atau bilangan-bilangan yang disusun dalam deretan baris dan deretan kolom dimana banyaknya deretan baris sama dengan banyaknya deretan kolom dan mempunyai suatu harga.

Dan biasanya dilambangkan dengan dua buah garis tegak.

Contoh:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dimana:

- Elemen-elemen yang mendatar adalah elemen baris sedangkan elemen-elemen vertikal adalah elemen kolom.
- Jika banyaknya elemen baris m buah, banyaknya elemen kolom n buah maka determinan A dikatakan berderajat m x n (berordo m x n).
- a_{ij} = elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j
- a_{12} = elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-2

2.2 Menentukan Harga Determinan

a. Determinan matriks berordo 2 x 2

Misalkan $[A]$ adalah matriks persegi berordo 2 x 2 sebagai berikut:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Determinan dari [A] didefinisikan sebagai selisih antara hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dengan hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder.

Determinan dari [A] dinotasikan dengan $\det A$ atau $|A|$. Berdasarkan definisi determinan, diperoleh determinan dari [A] sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\text{Det } A = |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})\end{aligned}$$

Contoh:

Tentukan nilai determinan dari matriks-matriks berikut.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\begin{aligned}\det A = |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (1 \times 8) - (2 \times 3) \\ &= 8 - 6 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det B = |B| &= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (4 \times (-4)) - (2 \times (-7)) \\ &= -16 - (-14) \\ &= -2\end{aligned}$$

b. Determinan matriks berordo 3×3

Misalkan $[A]$ adalah matriks persegi berordo 3×3 sebagai berikut:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai determinan dari $[A]$ yang berordo 3×3 , digunakan Metode Sarrus. Adapun langkah-langkah Metode Sarrus adalah sebagai berikut:

- 1) Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua dari matriks A kemudian diletakkan di sebelah kanan kolom ketiga,
Atau salin kembali kolom kedua dan kolom ketiga dari matriks A kemudian diletakkan di sebelah kiri kolom pertama.
Atau salin kembali baris pertama dan baris kedua dari matriks A kemudian diletakkan di sebelah bawah baris ketiga,
Atau salin kembali baris kedua dan baris ketiga dari matriks A kemudian diletakkan di sebelah atas baris pertama.
- 2) Hitung jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama. Nyatakan jumlah tersebut sebagai D_1 .
- 3) Hitung jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder. Nyatakan jumlah tersebut sebagai D_2 .
- 4) Determinan dari matriks A adalah pengurangan D_1 oleh D_2 , maka:

$$\det A = D_1 - D_2$$

Berdasarkan langkah-langkah Metode Sarrus, diperoleh determinan dari [A] sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\det A = |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= D_1 - D_2\end{aligned}$$

Dimana:

$$\begin{aligned}D_1 &= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) \\ D_2 &= (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) + (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) + (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}\det A = |A| &= D_1 - D_2 \\ &= [(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})] - \\ &\quad [(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) + (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) + (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})] \\ &= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - \\ &\quad (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})\end{aligned}$$

Contoh:

Tentukan nilai determinan dari matriks berikut.

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= [((-1) \times (-3) \times 3) + (2 \times 1 \times 0) + (5 \times 4 \times 2)] - \\ &\quad [(5 \times (-3) \times 0) + ((-1) \times 1 \times 2) + (2 \times 4 \times 3)] \\ &= [9 + 0 + 40] - [-0 - 2 + 24] \\ &= 49 - 22 \\ &= 27 \end{aligned}$$

c. Determinan matriks berordo lebih besar atau sama dengan 3×3 ($\geq 3 \times 3$)

Untuk menghitung determinan matriks berordo lebih besar atau sama dengan 3×3 ($\geq 3 \times 3$) dipergunakan ekspansi atau pembubaran menurut elemen baris atau elemen kolom.

1) Jika ekspansi atau pembubaran menurut elemen baris maka:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$$

2) Jika ekspansi atau pembubaran menurut elemen kolom maka:

$$|A| = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$$

Dimana:

a_{ij} = elemen dari matriks A yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j

M_{ij} = minor (determinan sisa apabila baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan).

Berdasarkan langkah-langkah diatas diperoleh determinan dari [A] sebagai berikut:

Misalkan [A] adalah matriks persegi berordo 4 x 4 sebagai berikut:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Jika ekspansi atau pembubaran menurut elemen baris pertama maka:

$$\begin{aligned}
 |A| &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^4 (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \\
 &= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot M_{12} + \\
 &\quad (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot M_{13} + (-1)^{1+4} \cdot a_{14} \cdot M_{14} \\
 &= a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} - a_{14} \cdot M_{14}
 \end{aligned}$$

Dimana:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad M_{14} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Jika ekspansi atau pembubaran menurut elemen kolom kedua maka:

$$\begin{aligned}
 |A| &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+2} a_{i2} \cdot M_{i2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot M_{12} + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot M_{22} + \\
&\quad (-1)^{3+2} \cdot a_{32} \cdot M_{32} + (-1)^{4+2} \cdot a_{42} \cdot M_{42} \\
&= -a_{12} \cdot M_{12} + a_{22} \cdot M_{22} - a_{32} \cdot M_{32} + a_{42} \cdot M_{42}
\end{aligned}$$

Dimana:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad M_{42} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Contoh :

- a. Tentukan nilai determinan dari matriks berikut.

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Jika ekspansi atau pembubaran menurut elemen baris pertama maka:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^4 (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot M_{1j}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot M_{13} \\
&= a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} \\
&= -1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -1(-9 - 2) - 2(12 - 0) + 5(8 - 0) \\
&= -1(-11) - 2(12) + 5(8) \\
&= 11 - 24 + 40 \\
&= 27
\end{aligned}$$

b. Tentukan nilai determinan dari matriks berikut.

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Jika ekspansi atau pembubaran menurut elemen kolom keempat maka:

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+4} a_{i4} \cdot M_{i4} \\
&= (-1)^{1+4} \cdot a_{14} \cdot M_{14} + (-1)^{2+4} \cdot a_{24} \cdot M_{24} + \\
&\quad (-1)^{3+4} \cdot a_{34} \cdot M_{34} + (-1)^{4+4} \cdot a_{44} \cdot M_{44} \\
&= -a_{14} \cdot M_{14} + a_{24} \cdot M_{24} - a_{34} \cdot M_{34} + a_{44} \cdot M_{44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 9 & 10 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 9 & 10 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} + \\
&\quad 5 \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 9 & 10 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -5(32) + 1(-272) - 8(48) + 5(208) \\
&= -160 - 272 - 384 + 1040 \\
&= 224
\end{aligned}$$

2.3. Sifat – Sifat Determinan.

- 1) Jika suatu determinan salah satu elemen baris atau elemen kolomnya mempunyai elemen nol semua, maka harga determinannya sama dengan nol.

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka:

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} \\
&= 0 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{12} + 0 \cdot M_{13} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- 2) Jika suatu determinan elemen – elemen barisnya ditukarkan menjadi elemen kolom yang bersesuaian atau ditransposkan maka harga determinannya tidak berubah.

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &\quad a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A^T| &= a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\ &\quad a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= |A| \end{aligned}$$

- 3) Jika dalam suatu determinan dua baris atau dua kolom ditukar tempatnya maka harga determinan baru sama dengan negatif harga determinan yang lama.
- 4) Jika dua baris atau kolom dalam satu determinan mempunyai elemen-elemen yang sama (identik) maka harga determinannya sama dengan nol.

- 5) Bila setiap elemen dari satu baris atau kolom dalam satu determinan digandakan dengan suatu konstanta k , maka harga determinan baru sama dengan k kali harga determinan lama.
- 6) Bila elemen – elemen yang bersesuaian dari 2 baris atau kolom dalam satu determinan adalah sebanding maka harga determinannya sama dengan nol.
- 7) Bila setiap elemen dari suatu baris atau kolom dalam suatu determinan merupakan penjumlahan dua suku maka bentuk determinan baru dapat dinyatakan dalam penjumlahan dua determinan yang elemen-elemennya merupakan pemisah dari dua suku pada baris atau kolom tersebut, sedangkan elemen-elemennya sama dengan elemen determinan semula.

Contoh :

$$[B] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 2 \\ -8+1 & -4 \end{bmatrix}$$

Maka :

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = -16 - (-14) = -2$$

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 2+2 & 2 \\ -8+1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= [-8 - (-16)] + [-8 - 2] \\ &= [8] + [-10] \\ &= -2 \end{aligned}$$

- 8) Bila setiap elemen dari suatu baris atau kolom setelah digandakan dengan konstanta k , kemudian ditambahkan pada tiap baris atau kolom yang lain dalam determinan itu maka harga determinannya tidak berubah.

TUGAS 1.

Diskusikan dengan teman anda.

1. Coba buktikan sifat-sifat determinan nomor 3, 4, 5, 6 dan 8.
2. Diketahui:

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & -3 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitung:

- e. $|A|$
- f. $|B|$
- g. $|B^T|$
- h. $|K_{13}[B]|$
- i. $|C|$
- j. $|H_{2(2)}[B]|$
- k. $|D|$
- l. $|H_{21(2)}[B]|$

Dari hasil yang anda peroleh, apa yang dapat anda simpulkan?

2.4 Latihan Soal.

Tentukan determinan dari matriks dibawah ini:

$$1. [A] = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 10 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2. [B] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 \\ 10 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. [C] = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 2 & -3 \\ -3 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & -3 \\ 4 & 12 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4. [D] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 9 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & 7 \\ 4 & 10 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$5. [E] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & 9 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & 7 & 6 \\ 4 & 10 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & 6 & -4 & 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

BAB III

INVERS MATRIKS

3.1 Pengertian Invers Matriks

Pada aljabar bilangan, kita telah mengenal bahwa jika suatu bilangan dikalikan dengan inversnya maka akan diperoleh unsur identitas. Begitu pula dalam matriks, jika suatu matriks apabila dikalikan dengan inversnya maka akan diperoleh matriks identitas. Supaya kita lebih memahami pernyataan tersebut, pelajari ilustrasi berikut.

Misalkan:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 8 & -6 + 6 \\ 12 - 12 & -8 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena perkalian antara matriks A dengan matriks B menghasilkan matriks identitas [I] maka dapat kita simpulkan bahwa matriks A dan matriks B saling invers. Hal ini berarti matriks B merupakan matriks invers dari matriks A ditulis $[B] = [A^{-1}]$ atau sebaliknya matriks A merupakan matriks invers dari matriks B ditulis $[A] = [B^{-1}]$. Dengan demikian kita dapat menyatakan sebagai berikut:

Jika $[A]$ dan $[B]$ adalah dua matriks persegi yang berordo sama dan memenuhi persamaan $[A][B] = [B][A] = [I]$ maka matriks A adalah matriks invers dari matriks B atau matriks B adalah matriks invers dari matriks A.

3.2 Menentukan Invers Matriks

Sebelum kita mempelajari invers matriks ada konsep yang harus kita pahami terlebih dahulu yaitu matriks minor, matriks kofaktor dan adjoint matriks.

d. Matriks Minor

Misalkan diketahui suatu matriks A sebagai berikut:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Di bab 2 kita sudah mempelajari cara mencari minor suatu matriks. Sehingga matriks minor dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & M_{m2} & \dots & M_{mr} \end{bmatrix}$$

e. Matriks Kofaktor

Jika M_{ij} merupakan minor ke- ij dari matriks A maka kofaktor (K_{ij}) adalah hasil perkalian $(-1)^{i+j}$ dengan elemen minor M_{ij} .

Dengan demikian, $K_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Sehingga matriks kofaktor dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mn} \end{bmatrix}$$

f. Adjoin Matriks

Jika matriks kofaktor dari matriks A tersebut di transposkan, maka didapat matriks baru yang disebut sebagai adjoin matriks A .

Sehingga adjoint matriks A adalah sebagai berikut:

$$\text{Adj } [A] = [K]^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \dots & K_{m1} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{mn} \end{bmatrix}$$

Setelah kita mempelajari matriks minor, matriks kofaktor dan adjoint matriks, mari kita sekarang menentukan invers matriks. Invers matriks dapat ditentukan dengan cara:

1. Dengan rumus yaitu:

$$[A^{-1}] = \frac{\text{adj } [A]}{|A|}$$

Dimana:

$$[A^{-1}] = \text{ invers matriks } A$$

$$\text{adj } [A] = \text{ adjoint matriks } A$$

$$|A| = \text{ determinan matriks } A$$

0

Contoh:

Tentukan invers matriks dibawah:

$$\text{a. } [A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } [B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\text{a. } [A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[A^{-1}] = \frac{\text{adj } [A]}{|A|}$$

Dimana:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } [A] = [K^T] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 9 - 8 = 1$$

Sehingga:

$$[A^{-1}] = \frac{\text{adj } [A]}{|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}{1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}^{-1}] = \frac{\text{adj } [\mathbf{B}]}{|\mathbf{B}|}$$

Dimana:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -17 & -11 & 3 \\ -11 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}] &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 17 & -11 & -3 \\ -11 & 7 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{adj } [\mathbf{B}] = [\mathbf{K}]^T = \begin{bmatrix} -2 & 17 & -11 \\ 1 & -11 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}| &= (-20 - 9 + 24) - (24 - 18 - 10) \\ &= (-5) - (-4) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}^{-1}] &= \frac{\text{adj } [\mathbf{B}]}{|\mathbf{B}|} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} -2 & 17 & -11 \\ 1 & -11 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}}{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Dengan Metode Transpormasi atau Operasi Elementer Pada Baris atau Kolom Matriks

Menyelesaikan invers matriks dengan metode transpormasi dilakukan dengan cara yaitu:

- Buat matriks yang akan dicari inversnya.
- Buat matriks identitas dengan ukuran yang sama dengan matriks yang akan dicari inversnya di sebelah kanannya.
- Kenakan transpormasi matriks pada matriks yang akan dicari inversnya dan pada matriks identitas yang dibuat tadi sampai pada matriks yang akan dicari inversnya menjadi matriks identitas.
- Kalau matriks yang kita akan cari inversnya sudah menjadi matriks identitas maka matriks identitas yang disebelah kanan tadi setelah dikenakan transpormasi matriks itu merupakan invers dari matriks yang kita cari.

Untuk lebih **jelasnya tentukan** invers matriks dibawah:

$$1. [A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2. [B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$1. [A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Mencari inversnya atau $[A^{-1}] = \dots \dots \dots ?$

Langkah:

a) Buat matriks yang akan dicari inversnya.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Buat matriks identitas dikanannya.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Kenakan transformasi matriks seperti:

$$1. \quad H_1^{(1/3)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad H_{21}^{(-4)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -4/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad H_2^{(3)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad H_{12}^{(-2/3)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

d) Jadi invers matriksnya:

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2. [B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Mencari inversnya atau $[B^{-1}] = \dots \dots \dots ?$

Langkah:

a) Buat matriks yang akan dicari inversnya.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

b) Buat matriks identitas dikanannya.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Kenakan transformasi matriks seperti:

$$1. \quad H_1^{(1/1)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad H_{21}^{(-2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad H_{31}^{(-3)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad H_2^{(1/2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad H_{32}^{(-3)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6. \quad H_3^{(-2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$7. \quad H_{12}^{(-1)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$8. \quad H_{13}^{(-11/2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$9. \quad H_{23}^{(7/2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

d) Jadi invers matriksnya:

$$[B^{-1}] = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

3.3 Latihan Soal

1. Tentukan apakah matriks-matriks dibawah ini memiliki invers:

a. $[A] = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $[B] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$

c. $[C] = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$

d. $[D] = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -7 & 6 \\ -3 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

2. Tentukan invers dari matriks dibawah ini:

a. $[E] = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

b. $[F] = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 10 & 15 & 6 \end{bmatrix}$

c. $[G] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -3 \\ 10 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

d. $[H] = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 2 & -3 \\ -3 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & -3 \\ 4 & 12 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

e. $[J] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 9 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & 7 \\ 4 & 10 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

BAB IV

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

4.1 Pengertian Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear adalah suatu sistem persamaan yang peubah-peubahnya atau variabel-variabelnya berpangkat satu. Sistem persamaan linear dapat terdiri dari dua atau lebih variabel.

Bentuk umum dari sistem persamaan linear dengan tiga persamaan dan tiga variabel yang belum diketahui adalah sebagai berikut:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3$$

dengan a, b, c dan $k \in R$

Dalam sistem persamaan linear besarnya variabel yang belum diketahui bisa dicari dengan syarat banyaknya variabel yang belum diketahui harus sama dengan jumlah persamaan linearnya.

Sehingga sistem persamaan linear dengan n buah persamaan dan n buah bilangan yang belum diketahui bisa diselesaikan dengan berbagai metode seperti: metode grafik, metode eleminasi, metode substitusi, metode eleminasi Gauss, metode operasi baris elemen, metode Cramer (determinan) dan metode invers.

Pada pembahasan kali ini kita akan menggunakan empat metode untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear yaitu metode eleminasi Gauss, metode operasi baris elemen, metode Cramer (determinan) dan metode invers matriks.

4.2 Metode Eliminasi Gauss

Metode ini lebih dikenal dengan metode substitusi balik (back substitution). Metode ini memecahkan sistem persamaan linear dengan mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk eselon baris.

Sehingga langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode eleminasi Gauss adalah:

- e) Rubah ke dalam bentuk matriks yang diperbesar.
- f) Lakukan transformasi atau operasi elementer pada baris dan kolom dari matriks diperbesar tadi sampai terbentuk matriks segi tiga atas atau matriks segitiga bawah.
- g) Kembalikan dalam bentuk matriks.
- h) Kembalikan ke dalam bentuk sistem persamaan linear.
- i) Substitusikan nilai variabel yang telah didapat ke persamaan liniar yang lainnya.

Contoh:

Tentukan besarnya nilai x, y dan z dari sistem persamaan linear:

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Langkah:

- a) Rubah dalam bentuk matriks yang diperbesar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Lakukan transformasi atau operasi elementer pada baris dan kolom dari matriks diperbesar tadi sampai terbentuk matriks segi tiga atas.

$$1. \quad H_1^{(1/1)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad H_{21}^{(-2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad H_{31}^{(-3)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad H_2^{(1/2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & 27 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad H_{32}^{(-3)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$6. \quad H_3^{(-2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

c) Kembalikan dalam bentuk matriks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -17/2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d) Kembalikan dalam bentuk sistem persamaan linear.

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - 7/2z = -17/2$$

$$z = 3$$

- e) Substitusikan nilai variabel yang telah didapat ke persamaan linear yang lainnya.

Dengan mensubstitusikan nilai $z = 3$ maka nilai $y = 2$ dan $x = 1$

4.3 Metode Operasi Baris Elemen

Metode ini agak mirip dengan metode eleminasi Gauss, namun transformasi pada baris dan kolom sampai terbentuk matriks identitas.

Sehingga langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode operasi baris elemen adalah:

- Rubah ke dalam bentuk matriks yang diperbesar.
- Lakukan transformasi atau operasi elementer pada baris dan kolom dari matriks diperbesar tadi sampai terbentuk matriks identitas.
- Kembalikan dalam bentuk matriks.
- Kembalikan ke dalam bentuk sistem persamaan linear.
- Tentukan nilai variabel.

Contoh:

Tentukan besarnya nilai x , y dan z dari sistem persamaan linear:

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Langkah:

- a) Rubah dalam bentuk matriks yang diperbesar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- b) Lakukan transformasi atau operasi elementer pada baris dan kolom dari matriks diperbesar tadi sampai terbentuk matriks identitas.

$$1. \quad H_1^{(1/1)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad H_{21}^{(-2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad H_{31}^{(-3)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad H_2^{(1/2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & 27 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad H_{32}^{(-3)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$6. \quad H_3^{(-2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$7. \quad H_{12}^{(-1)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$8. \quad H_{23}^{(7/2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$9. \quad H_{13}^{(-11/2)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

c) Kembalikan dalam bentuk matriks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d) Kembalikan dalam bentuk sistem persamaan linear.

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

e) Tentukan nilai variabel.

Maka nilai $x = 1$, $y = 2$ dan $z = 3$.

4.4 Metode Cramer

Metode ini sering disebut dengan metode determinan. Metode ini bisa dipergunakan untuk mencari variabel yang belum diketahui dalam sistem persamaan linear dengan n buah persamaan dan n buah variabel yang belum diketahui.

Misal:

Sistem persamaan linear dengan tiga persamaan dan tiga variabel yang belum diketahui adalah sebagai berikut:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = k_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = k_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = k_3$$

Rubah sistem persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$[A] \quad [X] = [K]$$

Dimana:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Pandang:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka:

$$| A | = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sesuai dengan sifat determinan no 5 (lihat sifat-sifat determinan pada Bab II) yaitu, bila setiap elemen dari satu baris atau kolom dalam satu determinan digandakan dengan suatu konstanta k atau x_1 , maka harga determinan baru sama dengan x_1 kali harga determinan lama.

Maka:

$$\begin{vmatrix} a_{11} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = | A | \cdot x_1$$

Sesuai dengan sifat determinan no 8 yaitu, bila setiap elemen dari suatu baris atau kolom setelah digandakan dengan konstanta x_2 atau x_3 , kemudian ditambahkan

pada tiap baris atau kolom yang lain dalam determinan itu maka harga determinannya tidak berubah.

Maka:

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot x_1$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot x_1$$

$$\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot x_1$$

$$|\mathbf{A}_1| = |\mathbf{A}| \cdot x_1$$

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh:

$$x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} \quad \text{dan} \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|}$$

Dengan:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}$$

Sehingga untuk sistem persamaan linear dengan n buah persamaan dan n buah variabel yang belum diketahui, dengan metode Cramer dapat di rumuskan:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad \text{dengan } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Contoh :

Tentukan besarnya nilai w, x, y dan z dari sistem persamaan linear:

$$1. \quad 2x + 3y = 28$$

$$3y + 4z = 46$$

$$4z + 5x = 53$$

$$2. \quad 4w - 2x + 3y + 5z = 25$$

$$w - 3y + z = 14$$

$$9w + 10x + 2y + 8z = 101$$

$$4w + 2x - 3y + 5z = 53$$

Jawab:

$$1. \quad 2x + 3y = 28$$

$$3y + 4z = 46$$

$$4z + 5x = 53$$

Sempurnakan sistem persamaan linearnya:

$$2x + 3y + 0 = 28$$

$$0 + 3y + 4z = 46$$

$$5x + 0 + 4z = 53$$

Rubah sistem persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 46 \\ 53 \end{bmatrix}$$

$$[A] [X] = [K]$$

Dimana:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[X] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 28 \\ 46 \\ 53 \end{bmatrix}$$

Pandang:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (24 + 60 + 0) - (0 + 0 + 0) = 84$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 28 & 3 & 0 \\ 46 & 3 & 4 \\ 53 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (336 + 636 + 0) - (0 + 0 + 552) = 420$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 28 & 0 \\ 0 & 46 & 4 \\ 5 & 53 & 4 \end{vmatrix} = (368 + 560 + 0) - (0 + 424 + 0) = 504$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 0 & 3 & 46 \\ 5 & 0 & 53 \end{vmatrix} = (318 + 690 + 0) - (420 + 0 + 0) = 558$$

Maka :

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{420}{84} = 5$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{504}{84} = 6$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{558}{84} = 7$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 4w - 2x + 3y + 5z = 25 \\
 & w - 3y + z = 14 \\
 & 9w + 10x + 2y + 8z = 101 \\
 & 4w + 2x - 3y + 5z = 53
 \end{aligned}$$

Sempurnakan sistem persamaan linearnya:

$$\begin{aligned}
 & 4w - 2x + 3y + 5z = 25 \\
 & w + 0 - 3y + z = 14 \\
 & 9w + 10x + 2y + 8z = 101 \\
 & 4w + 2x - 3y + 5z = 53
 \end{aligned}$$

Rubah sistem persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks:

$$\left[\begin{array}{cccc} 4 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w \\ x \\ y \\ z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 25 \\ 14 \\ 101 \\ 53 \end{array} \right]$$

$$[A] \quad [X] = [K]$$

Dimana:

$$[A] = \left[\begin{array}{cccc} 4 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \end{array} \right]$$

$$[X] = \left[\begin{array}{c} w \\ x \\ y \\ z \end{array} \right]$$

$$[K] = \left[\begin{array}{c} 25 \\ 14 \\ 101 \\ 53 \end{array} \right]$$

Pandang:

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4(68) + 2(38) + 3(12) - 5(32) = 224$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 25 & -2 & 3 & 5 \\ 14 & 0 & -3 & 1 \\ 101 & 10 & 2 & 8 \\ 53 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 25(68) + 2(310) + 3(148) - 5(508) = 224$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 25 & 3 & 5 \\ 1 & 14 & -3 & 1 \\ 9 & 101 & 2 & 8 \\ 4 & 53 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4(310) - 25(38) + 3(-28) - 5(-138) = 896$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 25 & 5 \\ 1 & 0 & 14 & 1 \\ 9 & 10 & 101 & 8 \\ 4 & 2 & 53 & 5 \end{vmatrix} = 4(-148) + 2(-28) + 25(12) - 5(20) = -448$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 25 \\ 1 & 0 & -3 & 14 \\ 9 & 10 & 2 & 101 \\ 4 & 2 & -3 & 53 \end{vmatrix} = 4(508) + 2(138) + 3(20) - 25(32) = 1568$$

Maka :

$$w = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{224}{224} = 1$$

$$x = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{896}{224} = 4$$

$$y = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{-448}{224} = -2$$

$$z = \frac{|\mathbf{A}_4|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1568}{224} = 7$$

4.5 Metode Invers Matriks

Metode ini bisa dipergunakan untuk mencari variabel yang belum diketahui dalam sistem persamaan linear dengan n buah persamaan dan n buah variabel yang belum diketahui.

Misal:

Sistem persamaan linear dengan tiga persamaan dan tiga variabel yang belum diketahui adalah sebagai berikut:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = k_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = k_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = k_3$$

Rubah sistem persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}] \quad [X] = [K]$$

Ruas kiri dan ruas kanan sama-sama dikalikan dengan invers matrik A, maka:

$$[\mathbf{A}] [\mathbf{A}^{-1}] [X] = [\mathbf{A}^{-1}] [K]$$

$$[\mathbf{I}] [X] = [\mathbf{A}^{-1}] [K]$$

$$[X] = [\mathbf{A}^{-1}] [K]$$

Sehingga dengan metode invers matriks dapat dirumuskan:

$$[X] = [\mathbf{A}^{-1}] [K]$$

Dimana:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$$[A^{-1}] = \text{invers matrik } A$$

$$[I] = \text{matrik identitas, dengan ukuran sama dengan matriks } A$$

Contoh :

Tentukan besarnya nilai x, y dan z dari sistem persamaan linear:

$$1. \quad 3x + 2y = 20$$

$$4x + 3y = 25$$

$$2. \quad x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Jawab:

$$1. \quad 3x + 2y = 20$$

$$4x + 3y = 25$$

Rubah sistem persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$[A] [X] = [K]$$

Dengan metode invers matriks dapat dirumuskan:

$$[X] = [A^{-1}] [K]$$

Dimana:

$$[X] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[A^{-1}] = \frac{\text{adj}[A]}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Sehingga:

$$[X] = [A^{-1}] [K]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 - 50 \\ -80 + 75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & x + y + 2z = 9 \\
 & 2x + 4y - 3z = 1 \\
 & 3x + 6y - 5z = 0
 \end{aligned}$$

Rubah sistem persamaan linear tersebut dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A] \quad [X] = [K]$$

Dengan metode invers matriks dapat dirumuskan:

$$[X] = [A^{-1}] [K]$$

Dimana:

$$[X] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$[A^{-1}] = \frac{\text{adj}[B]}{|B|} = \frac{\begin{bmatrix} -2 & 17 & -11 \\ 1 & -11 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga:

$$[X] = [A^{-1}] [K]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 - 17 + 0 \\ -9 + 11 + 0 \\ 0 + 3 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4.6 Latihan Soal

Selesaikan sistem persamaan linear di bawah ini dengan metode eleminasi Gauss, operasi baris elemen, metode Cramer dan invers matriks.

$$1) \quad 3x + 5y - 2z = 5$$

$$10x - 3y - 2z = 11$$

$$4x + 2y + 3z = 19$$

$$2) \quad 5X_1 + 2X_2 - 3X_4 = 1$$

$$X_1 - X_2 + X_3 = 6$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 - 3X_4 = -5$$

$$-3X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4 = -1$$

$$3) \quad 3y + 9x = -12$$

$$x + y = -8$$

$$4) \quad X + Y + Z = 0$$

$$X + 3Z + Y = 2$$

$$2X - 3Y - 5Z = 8$$

$$5) \quad 2y - 3x - 2z - 10 = 0$$

$$3z - 2y + 12 = -5x$$

$$7x + 4y - 7 = 20 - 5z$$

6) Diketahui:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 \\ -16 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Tentukan $[C]$ sehingga $[A][C] = [B]$

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. 1997. Aljabar Linear Elementer (terjemahan). Jakarta: Erlangga. Edwin J Purcell, dale varberg, “Kalkulus dan Geometri Analitis”, Jilid I Edisi 4 Erlangga. Ismail Basari,”Matematika I”.
- N. Soemarjo, Dra . Prof, “Kalkulus Dasar”, Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.
- Purell, Edwin J, “Calculus With Analyti Geometry”, Prentie-Hall, Inc, 1984.
- Soehardjo, “Analisa Vektor”.
- Sucipto E, “Matematika Untuk Perguruan Tinggi”.
- Thomas, “*Calculus and Analytic Geometri*”.
- Yoewono Moekidam, “Matematika II”, Bahan Kuliah Matematika Untuk Fakultas Teknologi.
- Yusuf Yahya, Suryadi HS, Agus S, “Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi”, Serial Matematika dan Komputer Aski, Ghalia Indonesia.