ALJABAR BOOLEAN

Definisi:

Misalkan terdapat

- Dua operator biner: + dan ·
- Sebuah operator uner: ’.
- *B* : himpunan yang didefinisikan pada opeartor +, ·, dan ’
- 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari *B*.

Tupel $(B, +, \cdot, ')$

disebut **aljabar Boolean** jika untuk setiap a, b, $c \in B$ berlaku aksioma-aksioma atau postulat Huntington berikut:

1. *Closure*/tertutup: (i) $a + b \in B$
   (ii) $a \cdot b \in B$

2. Identitas: (i) $a + 0 = a$
   (ii) $a \cdot 1 = a$

3. Komutatif: (i) $a + b = b + a$
   (ii) $a \cdot b = b \,.\, a$

4. Distributif: (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   (ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

5. Komplemen[1]: (i) $a + a' = 1$
   (ii) $a \cdot a' = 0$

Untuk mempunyai sebuah aljabar Boolean, harus diperlihatkan:

1. Elemen-elemen himpunan *B*,
2. Kaidah operasi untuk operator biner dan operator uner,
3. Memenuhi postulat Huntington.

Aljabar Boolean Dua-Nilai

Aljabar Boolean dua-nilai:

- $B = \{0, 1\}$
- operator biner, + dan ·
- operator uner, ’
- Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	a'
0	1
1	0

Cek apakah memenuhi postulat Huntington:

1. *Closure* : jelas berlaku , karena hasil operasi + dan · juga bernilai 0 atau 1.
2. Identitas: jelas berlaku karena dari tabel dapat kita lihat bahwa:

   (i) $0 + 1 = 1 + 0 = 1$

   (ii) $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$
3. Komutatif: jelas berlaku dengan melihat simetri tabel operator biner.

4. Distributif: (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dapat ditunjukkan benar dari tabel operator biner di atas dengan membentuk tabel kebenaran:

a	b	c	$b + c$	$a \cdot (b + c)$	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$(a \cdot b) + (a \cdot c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(ii) Hukum distributif $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ dapat ditunjukkan benar dengan membuat tabel kebenaran dengan cara yang sama seperti (i).

5. Komplemen: jelas berlaku karena Tabel 7.3 memperlihatkan bahwa:
   (i) $a + a' = 1$, karena $0 + 0' = 0 + 1 = 1$ dan $1 + 1' = 1 + 0 = 1$
   (ii) $a \cdot a = 0$, karena $0 \cdot 0' = 0 \cdot 1 = 0$ dan $1 \cdot 1' = 1 \cdot 0 = 0$

Karena kelima postulat Huntington dipenuhi, maka terbukti bahwa $B = \{0, 1\}$ bersama-sama dengan operator biner + dan · operator komplemen ‘ merupakan aljabar Boolean.

Ekspresi Boolean

- Misalkan $(B, +, \cdot, ')$ adalah sebuah aljabar Boolean. Suatu ekspresi Boolean dalam $(B, +, \cdot, ')$ adalah:
  (i) setiap elemen di dalam B,
  (ii) setiap peubah,
  (iii) jika e_1 dan e_2 adalah ekspresi Boolean, maka $e_1 + e_2$, $e_1 \cdot e_2$, e_1' adalah ekspresi Boolean

Contoh:

0
1
a
b
c
$a + b$
$a \cdot b$
$a' \cdot (b + c)$
$a \cdot b' + a \cdot b \cdot c' + b'$, dan sebagainya

Mengevaluasi Ekspresi Boolean

- Contoh: $a' \cdot (b + c)$

  jika $a = 0$, $b = 1$, dan $c = 0$, maka hasil evaluasi ekspresi:

$0' \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$

- Dua ekspresi Boolean dikatakan **ekivalen** (dilambangkan dengan '=') jika keduanya mempunyai nilai yang sama untuk setiap pemberian nilai-nilai kepada *n* peubah.
  Contoh:
  $a \cdot (b + c) = (a . b) + (a \cdot c)$

Contoh. Perlihatkan bahwa $a + a'b = a + b$.
<u>Penyelesaian</u>:

a	b	a'	$a'b$	$a + a'b$	$a + b$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

- Perjanjian: tanda titik ($\cdot$) dapat dihilangkan dari penulisan ekspresi Boolean, kecuali jika ada penekanan:
  (i) $a(b + c) = ab + ac$
  (ii) $a + bc = (a + b)(a + c)$
  (iii) $a \cdot 0$, bukan a0

Prinsip Dualitas

- Misalkan *S* adalah kesamaan (*identity*) di dalam aljabar Boolean yang melibatkan operator +, $\cdot$, dan komplemen, maka jika pernyataan *S** diperoleh dengan cara mengganti
  $\cdot$ dengan +
  + dengan $\cdot$
  0 dengan 1
  1 dengan 0
  dan membiarkan operator komplemen tetap apa adanya, maka kesamaan *S** juga benar. *S** disebut sebagai *dual* dari *S*.

Contoh.

(i) $(a \cdot 1)(0 + a') = 0$ dualnya $(a + 0) + (1 \cdot a') = 1$
(ii) $a(a' + b) = ab$ dualnya $a + a'b = a + b$

Hukum-hukum Aljabar Boolean

1. Hukum identitas: (i) $a + 0 = a$ (ii) $a \cdot 1 = a$	2. Hukum idempoten: (i) $a + a = a$ (ii) $a \cdot a = a$
3. Hukum komplemen: (i) $a + a' = 1$ (ii) $aa' = 0$	4. Hukum dominansi: (i) $a \cdot 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$
5. Hukum involusi: (i) $(a')' = a$	6. Hukum penyerapan/absorpsi: (i) $a + ab = a$ (ii) $a(a + b) = a$
7. Hukum komutatif: (i) $a + b = b + a$ (ii) $ab = ba$	8. Hukum asosiatif: (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a\ (b\ c) = (a\ b)\ c$
9. Hukum distributif: (i) $a + (b\ c) = (a + b)\ (a + c)$ (ii) $a\ (b + c) = a\ b + a\ c$	10. Hukum De Morgan: (i) $(a + b)' = a'b'$ (ii) $(ab)' = a' + b'$
11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$	12. (i) $a + a'b = a+b$ (ii) $a\ (a'+b) = ab$

Contoh 7.3. Buktikan (i) $a + a'b = a + b$ dan (ii) $a(a' + b) = ab$

Penyelesaian:

(i) $a + a'b = (a + ab) + a'b$ (Penyerapan)

$= a + (ab + a'b)$ (Asosiatif)

$= a + (a + a')b$ (Distributif)

$= a + 1\ b$ (Komplemen)

$= a + b$ (Identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

Aljabar Boolean sebagai Lattice

Suatu aljabar boolean B adalah *lattice complemented*, yaitu lattice yang terbatas dan semua elemennya mempuyai komplemen.

Fungsi Boolean

- **Fungsi Boolean** (disebut juga fungsi biner) adalah pemetaan dari B^n ke B melalui ekspresi Boolean, kita menuliskannya sebagai

  $$f : B^n \to B$$

  yang dalam hal ini B^n adalah himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda-n (*ordered n-tuple*) di dalam daerah asal B.

- Setiap ekspresi Boolean tidak lain merupakan fungsi Boolean.
- Misalkan sebuah fungsi Boolean adalah

  $$f(x, y, z) = xyz + x'y + y'z$$

  Fungsi f memetakan nilai-nilai pasangan terurut ganda-3
  (x, y, z) ke himpunan $\{0, 1\}$.
  Contohnya, $(1, 0, 1)$ yang berarti $x = 1$, $y = 0$, dan $z = 1$
  sehingga $f(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1' \cdot 0 + 0' \cdot 1 = 0 + 0 + 1 = 1$.

Contoh. Contoh-contoh fungsi Boolean yang lain:

1. $f(x) = x$
2. $f(x, y) = x'y + xy' + y'$
3. $f(x, y) = x' y'$
4. $f(x, y) = (x + y)'$
5. $f(x, y, z) = xyz'$

- Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplemennya, disebut **literal**.

Contoh: Fungsi $h(x, y, z) = xyz'$ pada contoh di atas terdiri dari 3 buah literal, yaitu x, y, dan z'.

Contoh. Diketahui fungsi Booelan $f(x, y, z) = xy\,z'$, nyatakan h dalam tabel kebenaran.

Penyelesaian:

x	y	z	$f(x, y, z) = xy\,z'$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Penyederhanaan Fungsi Boolean

Contoh. $f(x, y) = x'y + xy' + y'$

disederhanakan menjadi

$f(x, y) = x' + y'$

Penyederhanaan fungsi Boolean dapat dilakukan dengan cara:

1. Secara aljabar
2. Menggunakan Peta Karnaugh

1. Penyederhanaan Secara Aljabar

Contoh:

1. $f(x, y) = x + x'y$

$$= (x + x')(x + y)$$
$$= 1 \cdot (x + y)$$
$$= x + y$$

2. $f(x, y, z) = x'y'z + x'yz + xy'$

$= x'z(y' + y) + xy'$

$= x'z + xz'$

3. $f(x, y, z) = xy + x'z + yz = xy + x'z + yz(x + x')$

$= xy + x'z + xyz + x'yz$

$= xy(1 + z) + x'z(1 + y) = xy + x'z$

2. Peta Karnaugh

a. *Peta Karnaugh dengan dua peubah*

m_0	m_1
m_2	m_3

		y	
		0	1
x	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

b. *Peta dengan tiga peubah*

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

		yz			
		00	01	11	10
x	0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
	1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Contoh. Diberikan tabel kebenaran, gambarkan Peta Karnaugh.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	0	0	1
	1	0	0	1	1

b. *Peta dengan empat peubah*

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

wx \ *yz*	00	01	11	10
00	*w'x'y'z'*	*w'x'y'z*	*w'x'yz*	*w'x'yz'*
01	*w'xy'z'*	*w'xy'z*	*w'xyz*	*w'xyz'*
11	*wxy'z'*	*wxy'z*	*wxyz*	*wxyz'*
10	*wx'y'z'*	*wx'y'z*	*wx'yz*	*wx'yz'*

Contoh. Diberikan tabel kebenaran, gambarkan Peta Karnaugh.

w	x	y	z	$f(w, x, y, z)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

wx \ *yz*	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	0

Himpunan

Definisi

- Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.

- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

Cara Penyajian Himpunan

1. Enumerasi

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

Contoh 1.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
- $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
- $K = \{ \{\} \}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

- **Contoh 2.** Misalkan:

  $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$

  $K = \{\{\}\}$

  maka

  $3 \in A$

  $\{a, b, c\} \in R$

  $c \notin R$

  $\{\} \in K$

  $\{\} \notin R$

2. Simbol-simbol Baku

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }
N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }
Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.

Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

3. ***Notasi Pembentuk Himpunan***

Notasi: { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }

Contoh 3.
A adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 5

A = { x | x bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau $A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$

yang ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

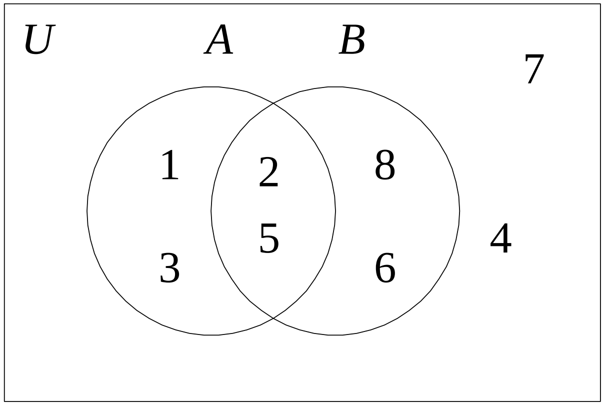
4. <u>Diagram Venn</u>

Contoh 4.

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},

A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A.

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 5.

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 $\}$,

atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

(ii) T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

Himpunan kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\emptyset$ atau {}

Contoh 6.

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$ }, $n(A) = 0$

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset\}$
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

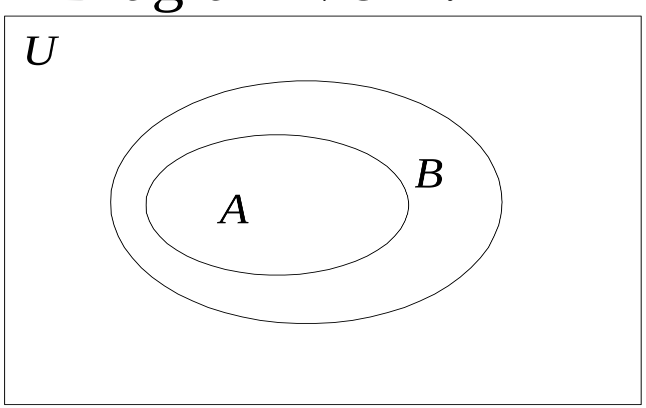
Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.

- Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.

- Notasi: $A \subseteq B$

- Diagram Venn:



Contoh 7.

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan
$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A
($\varnothing \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

  (i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

  A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.

  Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  (ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.

- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 8.

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) jika $A = B$, maka $B = A$

(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

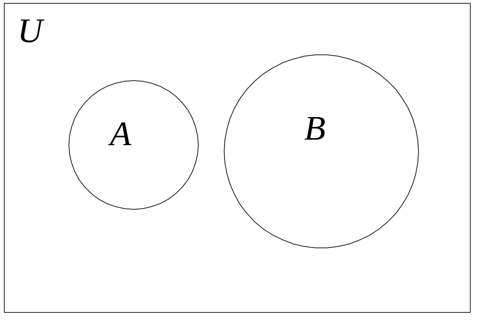
Contoh 9.
Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka
$A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

- Notasi : A // B

- Diagram Venn:



Contoh 10.
Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka A // B.

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

- Notasi : $P(A)$ atau 2^A

- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

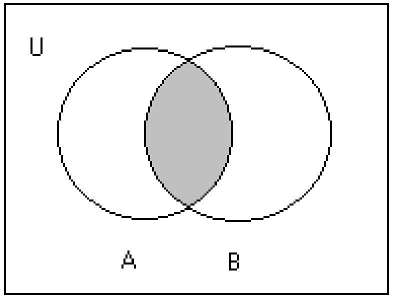
Contoh 11.
Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

Contoh 12.
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



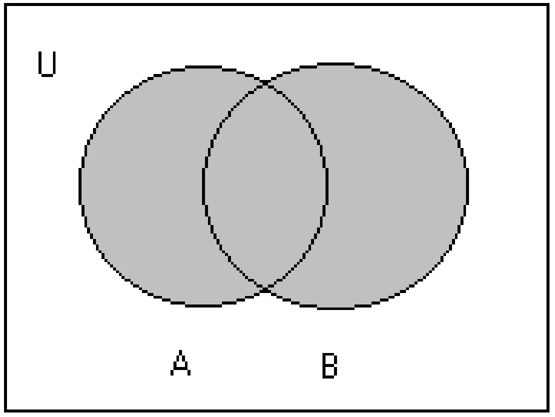
Contoh 13.

(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$. Artinya: $A // B$

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ atau $x \in B \}$



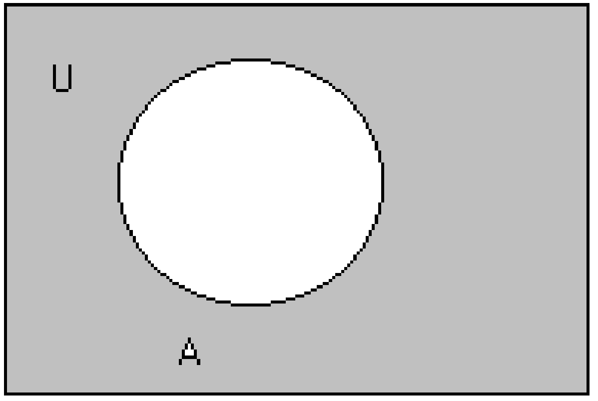
Contoh 14.

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh 15.

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 16. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

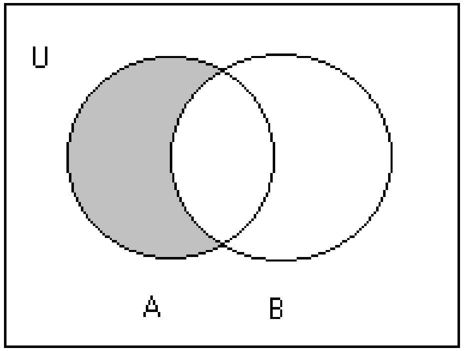
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

4. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



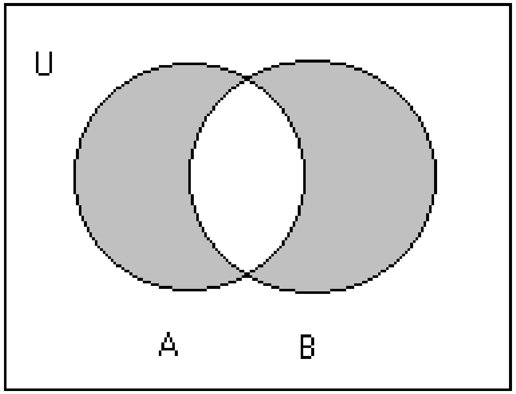
Contoh 17.

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh 18.

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 19.

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Hukum-hukum Himpunan

- Disebut juga sifat-sifat (*properties*) himpunan
- Disebut juga hukum aljabar himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap U = A$	2. Hukum *null*/dominasi: – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = U$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$

5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$ – $\overline{\mathrm{U}} = \varnothing$	

Prinsip Dualitas

- Prinsip dualitas → dua konsep yang berbeda dapat saling dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: AS → kemudi mobil di kiri depan
Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,

- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Prinsip **dualitas**:
Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan *S* adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika *S** diperoleh dari *S* dengan mengganti

$\cup \to \cap$,

$\cap \to \cup$,

$\varnothing \to$ U,

U $\to \varnothing$,

sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan *S** juga benar dan disebut dual dari kesamaan *S*.

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$

5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$	Dualnya: $\overline{\mathrm{U}} = \varnothing$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan *B*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh 24. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,
B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,
$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

Yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$$
$$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$$
$$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| = {} & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \\
& |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}
$$

Untuk himpunan A_1, A_2, …, A_r, berlaku:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = {} & \sum_{i} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le r} |A_i \cap A_j| + \\
& \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + \\
& (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|
\end{aligned}
$$

Latihan:

Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

LATTICE

Definisi:

Misalkan $L \neq \emptyset$, yang tertutup terhadap dua operasi biner, yaitu $\wedge$ dan $\vee$ (*meet* dan *join*). Maka L isebut ***LATTICE*** Jika $\forall\, a, b, c \in L$, memenuhi:

a) Hukum komutatif

$$a \wedge b = b \wedge a \qquad \text{dan } a \vee b = b \vee a$$

b) Hukum Asosiatif

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c \qquad \text{dan}(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

c) Hukum Absorpsi

$$a \vee (a \wedge b) = a \qquad \text{dan } a \wedge (a \vee b) = a$$

Notasi *Lattice* : $< L, \ \wedge, \ \vee >$ atau $< L, \leq >$ atau L.

Definisi:

Misalkan $< L, \ \wedge, \ \vee >$ suatu Lattice dan M adalah subset tak kosong dari L. Maka, lattice $< M, \wedge, \ \vee >$ adalah sublattice dari $< L, \ \wedge, \ \vee >$ jika dan hanya jika M tertutup dibawah operasi $\wedge$ dan $\vee$.

Definisi:

Suatu poset A disebut lattice jika dan hanya jika $a \wedge b = \text{infimum } (a, b)$ dan $a \vee b = \text{supremum } (a, b)$ ada untuk setiap pasangan elemen a dan b dalam himpunan A.

Definisi:

Jika tidak ada $x \in L$ sedemikian sehingga $a \leq x$ dan $x \leq b$ (tidak ada x diantara a dan b).Maka :

a adalah *predecessor immediate* dari b dan

b adalah *succcessor immediate* dari a

ELEMEN LATTICE

Misalkan L suatu lattice dimana 0 adalah elemen terkecil dari L dan Iadalah elemen terbesar dari L. Jika $a \in L$, maka:

a) a disebut *meet irreducible* jika: $a = x \wedge y$ mengakibatkan $a = x$ atau $a = y$.
b) a disebut *join irreducible* jika: $a = x \vee y$ mengakibatkan $a = x$ atau $a = y$.
c) a disebut atom jika: a adalah $join\ irreducible$ dan a *succcessor immediate* dari 0.
d) $\bar{a}$ adalah komplemen dari a jika: $a \vee \bar{a} = I$ dan $a \wedge \bar{a} = 0$.

JENIS LATTICE

a. L adalah Lattice Terbatas jika L mempunyai sebuah elemen terkecil dan sebuah elemen terbesar.

b. L disebut Lattice Distributif jika untuk semua $a, b, c \in L$ berlaku:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

c. L disebut Lattice Complemented jika L terbatas dan semua elemen di L mempunyai komplemen.

d. L disebut Lattice Complete jika semua subset dari L memiliki supremum dan infimum.

Contoh:

Misalkan $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$ faktor-faktor dari 12 terurut oleh relasi pembagian adalah lattice dengan $a \vee b = KPK(a, b)$ dan $a \wedge b = FPB\ (a, b)$. Maka:

- Elemen terkecil= 1 dan elemen terbesar=12
- Komplemen dari 4 adalah 3, karena $4 \wedge 3 = FPB\ (4,3) = 1$ dan $4 \vee 3 = KPK(4,3) = 12$.
- Lattice D bukan merupakan lattice complemented karena 6 tidak mempunyai komplemen.

POSET

Definisi :

Suatu relasi biner R pada sebuah himpunan S disebut suatu **urutan parsial/ partial ordering** pada S jika R bersifat :

a) REFLEKSI : $aRa, \forall a \in S$

b) ANTISIMETRI : Jika $aRb\ dan\ bRa\ , maka\ a = b$

c) TRANSITIF : Jika $aRb\ dan\ bRc\ , maka\ aRc$

Pasangan $< S, R >$ disebut **himpunan terurut parsial / Partially Ordered Set atau POSET**.

Notasi relasi POSET :

" $\leq$ " , artinya 'mendahului'

"$a \leq b$", artinya 'a mendahului b'

Contoh:

a) $< N, \leq >$ adalah sebuah POSET, karena " $\leq$ " menyatakan relasi 'lebih kecil dari atau sama dengan ' merupakan suatu **urutan parsial** pada N(bilangan asli). Bukti:
   - Karena $a = a$, maka $a \leq a$, $\forall a \in N$: sifat refleksif dipenuhi.
   - Jika $a \leq b\ dan\ b \leq a$, maka hal ini hanya akan dipenuhi jika $a = b$: sifat antisimetri
   - Jika $a \leq b\ dan\ b \leq c$, maka pasti $a \leq c$: sifat transitif.

   Terbukti bahwa relasi " $\leq$ " adalah urutan parsial pada N.

b) B adalah sembarang himpunan dan $P(B)$ adalah *power set* dari B. Relasi "⊆" yang menyatakan "subset dari" merupakan urutan parsial pada $P(B)$, karena relasi "⊆" bersifat refleksif, antisimetri dan transitif.Maka $< P(B), \subseteq >$ adalah POSET.

c) Misalkan MK adalah himpunan mata kuliah pada sebuah jurusan. "$mk\ 1 \leq mk\ 2$" menyatakan mata kuliah $mk\ 1$ sama dengan $mk\ 2$ atau $mk\ 1$ adalah prasyarat untuk mengambil $mk\ 2$. Karena relasi "≤" bersifat refleksif, antisimetri dan transitif, maka $< MK, \leq >$ adalah POSET .

Definisi:

Suatu relasi biner pada sebuah himpunan S disebut **urutan parsial ketat/ *quasy order* atau *strict partial order*** , jika relasi tersebut besifat :

a) IRREFLEKSIF

   $a\not R a$ atau a tidak berrelasi dengan a, untuk setiap $a \in S$

b) TRANSITIF

Jika $aRb\ dan\ bRc\ , maka\ aRc$

Notasi relasi urutan parsial ketat: "$<$"

Urutan parsial $\leq$ pada suatu himpunan S tidak perlu setiap pasangan elemen nya harus berrelasi.

Definisi: Misalkan $< S, \leq >$ adalah POSET, dan $a, b \in S$, maka :

- a dan b ***comparable*** jika $a \leq b$ atau $b \leq a$.
- a dan b ***noncomparabl**e* jika $a \nleq b$ dan $b \nleq a$.

Definisi:

Suatu urutan parsial $\leq$ pada himpunan S disebut suatu **urutan total atau urutan linier/ *total order* atau *linear order*,** jika berlaku:

$\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S} | \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{atau}\ \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}$**,** artinya setiap pasangan di S *comparable*.

Pasangan $< S, \leq >$ seperti diatas disebut **himpunan terurut linier/ linearly ordered set** atau sebuah **rantai/ CHAIN.**

Definisi:

Bila $< S, \leq >$ adalah sebuah POSET, $A \subseteq S$ dan $A \neq \emptyset$,maka:

a) $a \in A$ disebut elemen minimal dari A jika: tidak ada $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq a$
b) $a \in A$ disebut elemen maksimal dari A jika: tidak ada $x \in A$ sedemikian sehingga $a \leq x$
c) $a \in A$ disebut elemen terkecill dari A jika: $a \leq x, \forall x \in A$
d) $a \in A$ disebut elemen terbesar dari A jika: $x \leq a, \forall x \in A$
e) $b \in S$ disebut batas bawah dari A jika: $b \leq x, \forall x \in A$
f) $b \in S$ disebut batas atas dari A jika: $x \leq b, \forall x \in A$
g) $b \in S$ disebut batas bawah terbesar/infimum dari A jika: untuk setiap c yang merupakan batas bawah lain dari A, berlaku $c \leq b$.
h) $b \in S$ disebut batas atas terkecil/supremum dari A jika: untuk setiap c yang merupakan batas atas lain dari A, berlaku $b \leq c$.

DIAGRAM HASSE

Diagram Hasse dari POSET $< S, \leq >$ digambarkan sebagai suatu graph tak berarah tanpa loop, dimana *node* menunjukkan elemen dari S dan *edge* menunjukkan relasi.

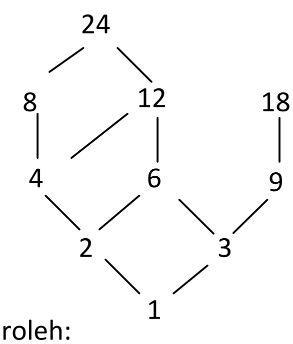
Aturan membuat Diagram Hasse:

- Jika $a \leq b$ dan $a \neq b$, maka a terletak di bawah b.

- Jika $a \leq b$ dan tidak ada $c \in S$ sedemikian sehingga $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka dari a ke b ditarik sebuah edge/garis.
- Jika $a \leq b \; dan \; a \leq c$ maka b dan c terletak pada level yang sama.

Contoh:

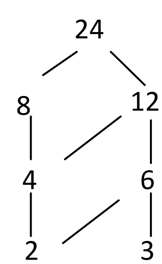
1. Misalkan $A = \{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24\}$ himpunan terurut oleh pembagian. Maka diagram hasse nya adalah:



Dari diagram diatas, diperoleh:

- 1 adalah elemen minimal dan elemen terkecil dari A
- 18 dan 24 adalah elemen maksimal dari A, karena tidak ada elemen A yang dapat dibagi oleh 18 maupun 24.
- A tidak memiliki elemen terbesar, karena tidak ada elemen A yang dapat dibagi oleh semua elemen lain di A.

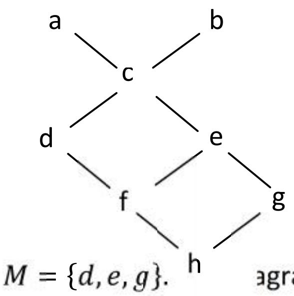
2. Misalkan $B = \{2,3,4,6,8,12,24\}$ himpunan terurut oleh pembagian. Maka diagram hasse nya adalah:



Dari diagram diatas, diperoleh:

- 2 dan 3 adalah elemen minimal dari B, karena tidak elemen B yang membagi 2 dan 3.
- B tidak memiliki elemen terkecil, karena tidak ada elemen B yang dapat membagi semua elemen lain di B.
- 24 adalah elemen maksimal dan elemen terbesar dari B.

3. Misalkan $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ himpunan terurut seperti pada gambar:



Dan misalkan $M = \{d, e, g\}$. agram di atas, diperoleh:

- Batas atas dari M adalah a, b dan c.
- Batas bawah dari M adalah h
- Supremum dari M adalah c dan Infimum dari M adalah h.

Proposisi

Konsep dan Notasi Dasar

Kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.

Contoh 1

Semua pernyataan di bawah ini adalah proposisi:

a) 13 adalah bilangan ganjil.
b) $1 + 1 = 2$.
c) $8 \geq$ akar kuadrat dari $8 + 8$.
d) Ada monyet di bulan.
e) Hari ini adalah hari Rabu.
f) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap.
g) $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil.

Contoh 2

Semua pernyataan di bawah ini bukan proposisi

(a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?
(b) Isilah gelas tersebut dengan air!
(c) $x + 3 = 8$
(d) $x > 3$

Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil p, q, r, ….

p : 13 adalah bilangan ganjil.
q : Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap.
r : $2 + 2 = 4$

Misalkan p dan q adalah proposisi.
1. **Konjungsi** (*conjunction*): p dan q
   Notasi $p \wedge q$,
2. **Disjungsi** (*disjunction*): p atau q
   Notasi: $p \vee q$
3. **Ingkaran** (*negation*) dari p: tidak p
   Notasi: $\sim p$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\sim q$
T	F
F	T

Contoh 3

Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Hari ini hujan
q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \vee q$: Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah

$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan
(atau: Hari ini *tidak* hujan)

Contoh 4

Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi
q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian:

(a) $p \wedge q$
(b) $p \wedge {\sim}q$
(c) ${\sim}p \wedge {\sim}q$
(d) ${\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$
(e) $p \vee ({\sim}p \wedge q)$
(f) ${\sim}({\sim}p \wedge {\sim}q)$

Misalkan p dan q adalah proposisi.

1. *Kondisional atau implikasi* : $p \to q$
2. *Konvers (kebalikan)* : $q \to p$
3. *Invers* : $\sim p \to \sim q$
4. *Kontraposisi* : $\sim q \to \sim p$

				Implikasi	Konvers	Invers	Kontraposisi
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Bikondisional (Bi-implikasi)

- Bentuk proposisi: "*p* jika dan hanya jika *q*"
- Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Tabel kebenaran

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

Tautologi dan Kontradiksi

- Proposisi majemuk disebut *tautologi* jika ia benar untuk semua kasus
- Proposisi majemuk disebut *kontradiksi* jika ia salah untuk semua kasus.

Contoh 7. $p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Contoh 8. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Ekivalensi Logika

- Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

  Notasi: $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

Contoh 9. Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Aljabar Proposisi

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – ${\sim}({\sim}\mathrm{p}) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – ${\sim}(p \wedge q) \Leftrightarrow {\sim}p \vee {\sim}q$ – ${\sim}(p \vee q) \Leftrightarrow {\sim}p \wedge {\sim}q$

Contoh 10

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

Penyelesaian:

$p \vee \sim(p \vee q)$	$\Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$	(Hukum De morgan)
	$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$	(Hukum distributif)
	$\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (p \vee \sim q)$	(Hukum negasi)
	$\Leftrightarrow p \vee \sim q$	(Hukum identitas)

Contoh 11

Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q)$	$\Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q)$	(Hukum Identitas)
	$\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q)$	(Hukum distributif)
	$\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F}$	(Hukum *Null*)
	$\Leftrightarrow p$	(Hukum Identitas)

RELASI

Anggota sebuah himpunan dapat dihubungkan dengan anggota himpunan lain atau dengan anggota himpunan yang sama. Hubungan tersebut dinamakan relasi.

Contoh 1

Misalkan $M = \{Ami, Budi, Candra, Dita\}$ dan $N = \{1, 2, 3\}$. Misalkan pula, Ami berusia 1 tahun, Budi berusia 3 tahun, Candra berusia 2 tahun dan Dita berusia 1 tahun, maka kita dapat menuliskan sebuah himpunan P = {(Ami, 1), (Budi, 3), (Candra, 2), (Dita, 1)} dimana P merupakan himpunan pasangan terurut yang menggambarkan hubungan antara himpunan M dengan himpunan N. Himpunan P merupakan relasi antara himpunan M dengan himpunan N dan dapat ditulis sebagai P = {(x,y) | x berusia y, dimana $x \in M$ dan $y \in N$}.

PERKALIAN CARTESIAN DAN RELASI

Misalkan A dan B adalah sembarang himpunan yang tidak kosong. Perkalian Cartesian $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan terurut (x,y) dimana $x \in A$ dan $y \in B$.

$$A \times B = \{ (x,y) \mid \text{untuk setiap } x \in A \text{ dan } y \in B \}$$

Contoh 2

Misalkan $C = \{ 2, 3, 4 \}$ dan $D = \{ x, y \}$.

$$C \times D = \{ (2,x) , (2,y) , (3,x) , (3,y) , (4,x) , (4,y) \}$$

$$D \times C = \{ (x,2) , (y,2) , (x,3) , (y,3) , (x,4) , (y,4) \}$$

Banyaknya anggota himpunan hasil perkalian cartesian $A \times B$ sama dengan hasil kali antara banyaknya anggota A dengan banyaknya anggota B.

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B).$$

Pada umumnya, $A \times B \neq B \times A$. Akan tetapi $n(A \times B) = n(B \times A)$.

Contoh 3

1. Dari contoh 2, diketahui $n(C) = 3$ dan $n(D) = 2$.
   Dengan demikian $n(C \times D) = 3 \times 2 = 6$.
2. Dari contoh 1, $n(M \times N) = n(N \times M) = 12$.

Sebuah relasi R yang memasangkan anggota himpunan A kepada anggota himpunan B, ditulis $R : A \to B$ merupakan sebuah himpunan bagian dari perkalian cartesian $A \times B$, ditulis $R \subseteq A \times B$.

Jika sebuah relasi R didefinisikan pada himpunan A, ditulis $R : A \to A$, maka $R \subseteq A \times A$.

Contoh 4

1. Misalkan $C = \{2, 3, 4\}$ dan $D = \{x, y\}$.
   $$C \times D = \{(2,x), (2,y), (3,x), (3,y), (4,x), (4,y)\}$$
   Sebuah relasi $R_1: C \to D$ didefinisikan sebagai
   $$R_1 = \{(2,y), (3,x), (4,x), (4,y)\}.$$
   Jelas bahwa $R_1 \subseteq C \times D$.
2. Relasi $R_2 : G \to G$ didefinisikan pada himpunan $G = \{5, 7, 11\}$ sebagai $R_2 = \{(x,y) \mid x < y, \text{ dimana } x, y \in G\}$.
   Relasi tersebut dapat dinyatakan sebagai $R_2 = \{(5,7),(5,11), (7,11)\}$ dan jelas bahwa $R_2 \subseteq G \times G$.

PENYAJIAN RELASI

Sebuah relasi dapat disajikan dalam beberapa bentuk, yaitu :

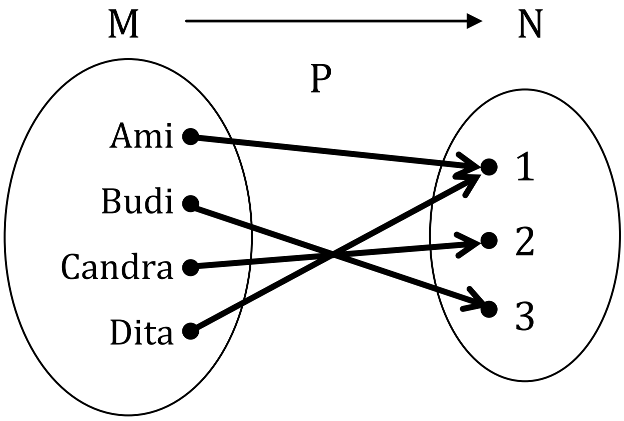
1. himpunan pasangan terurut dalam bentuk pendaftaran (tabulasi),

   P = {(Ami, 1), (Budi, 3), (Candra, 2), (Dita, 1)}

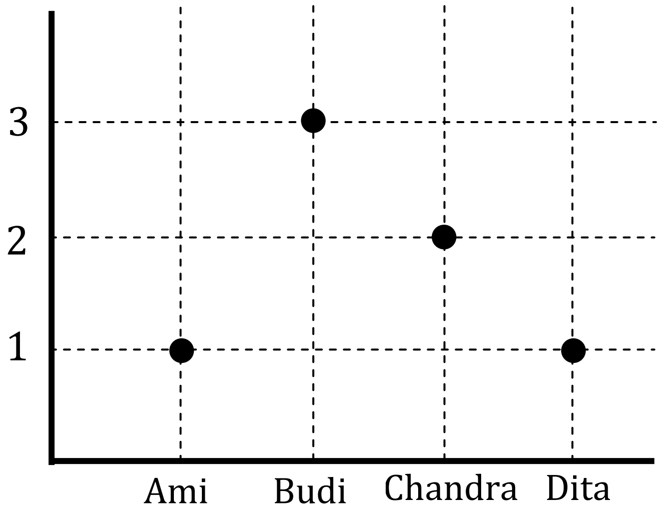
2. himpunan pasangan terurut dalam bentuk pencirian,

   P = {(x,y) | x berusia y, dimana $x \in M$ dan $y \in N$}

3. diagram panah,



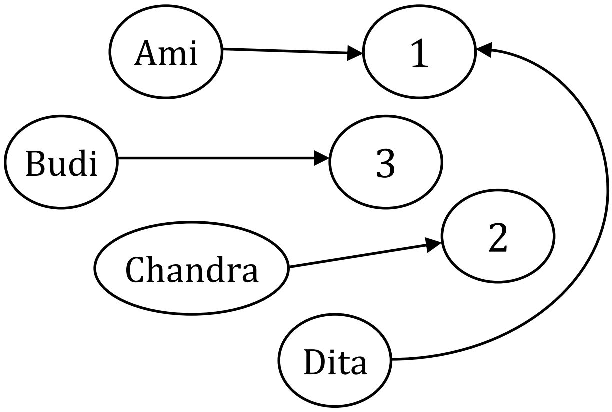
4. diagram koordinat atau grafik relasi,



5. matriks relasi,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. bentuk graf berarah (digraf)



RELASI INVERS

Setiap relasi R dari himpunan A kepada himpunan B memiliki invers yang dinamakan R^{-1} dari himpunan B kepada himpunan A, yang ditulis sebagai

$$R^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in R \}$$

Dengan kata lain, relasi invers R^{-1} dari R mengandung pasangan-pasangan terurut yang bila dibalikkan akan terkandung dalam relasi R .

Contoh 6

Misalkan A = {1, 2, 3}, B = {a, b} dan relasi R = {(1,a),(2,a),(2,b),(3,a)} merupakan relasi dari A pada B. Invers dari relasi R adalah relasi

R^{-1} = { (a,1) , (a,2) , (b,2) , (a,3) }.

Contoh 7

Misalkan W = {a, b, c}, relasi R = {(a,b) , (a,c) , (c,c) , (c,b)} merupakan relasi pada W. Invers dari relasi R adalah relasi

R^{-1} = { (b,a) , (c,a) , (c,c) , (b,c) }.

KOMPOSISI RELASI

Misalkan R relasi dari himpunan A ke himpunan B dan S relasi dari himpunan B ke himpunan C. Didefinisikan relasi baru dari himpunan A ke himpunan C, ditulis $R \circ S$ yang beranggotakan semua pasangan terurut (a,c) yang memenuhi $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in S$, atau dapat dinyatakan sebagai:

$R \circ S = \{(a,c) \mid \exists\, b \in B$ yang memenuhi $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in S\}$

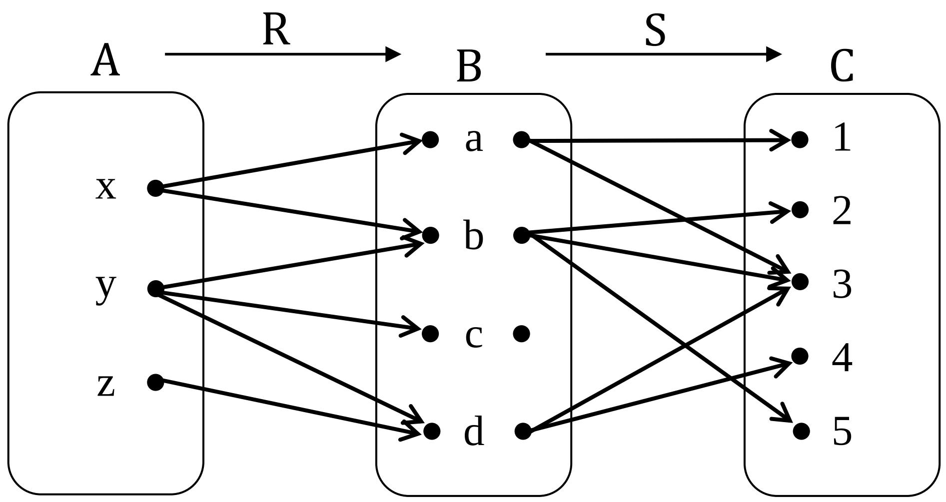
Contoh 8

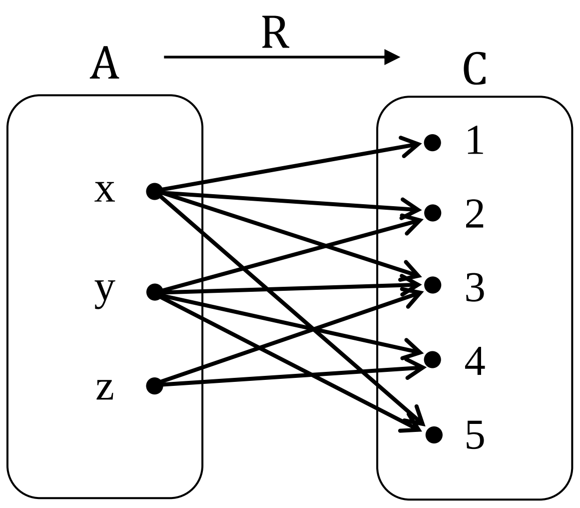
Misalkan A = {x,y,z}, B = {a,b,c,d}, C = {1,2,3,4,5}. R relasi dari A ke B dan S relasi dari B ke C.

Misalkan R = {(x,a),(x,b),(y,b),(y,c),(y,d),(z,d)} dan

S = {(a,1),(a,3),(b,2),(b,3),(b,5),(d,3),(d,4)}maka

R∘S={(x,1),(x,2),(x,3),(x,5),(y,2),(y,3),(y,5),(y,4),(z,3),(z,4)}.





SIFAT RELASI

Misalkan R sebuah relasi yang didefinisikan pada himpunan A. Relasi R dikatakan bersifat ***refleksif*** jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $(a,a) \in R$.

Contoh 9

Diketahui $A = \{1, 2, 3\}$. Pada A didefinisikan relasi $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$. Relasi R_1 tersebut bersifat refleksif.

Contoh 10

Diketahui $B = \{2,4,5\}$. Pada B didefinisikan relasi $R_2 = \{(x,y) \mid x$ kelipatan $y, x, y \in B\}$. Maka $R_2 = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R_2 tersebut bersifat refleksif.

Contoh 11

Diketahui $B = \{2,4,5\}$. Pada B didefinisikan relasi $R_3 = \{(x,y) \mid x + y < 10, x,y \in A\}$. Maka $R_3=\{(2,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4), (4,5), (5,2), (5,4)\}$. Relasi R_3 tersebut tidak bersifat refleksif.

Relasi R bersifat ***simetris*** jika untuk setiap $(a,b) \in R$ berlaku $(b,a) \in R$.

Contoh 12

Diketahui $A = \{ 1, 2, 3 \}$. Pada A didefinisikan relasi $R_4 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R_4 tersebut bersifat simetris.

Contoh 13

Diketahui $B = \{ 2, 4, 5 \}$. Pada B didefinisikan relasi $R_5 = \{ (x,y) \mid$ x kelipatan $y, x, y \in B \} = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R_5 tersebut tidak bersifat simetris karena $(4,2) \in R_5$ tetapi $(2,4) \notin R_5$.

Relasi R bersifat ***transitif***, jika untuk setiap $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$ berlaku $(a,c) \in R$.

Contoh 14
Diketahui $A = \{ 1, 2, 3 \}$.
Pada A didefinisikan relasi $R_6 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$
Relasi R_6 tersebut bersifat transitif.

Contoh 15
Relasi $R_7 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$ yang didefinisikan pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ tidak bersifat transitif, karena terdapat $(1,2) \in R_7$ dan $(2,3) \in R_7$, tetapi $(1,3) \notin R_7$.

Relasi R dikatakan bersifat ***antisimetris*** jika untuk setiap $(a,b) \in R$ dan $(b,a) \in R$ berlaku $a = b$.

Contoh 16
Pada himpunan $B = \{ 2, 4, 5 \}$ didefinisikan relasi $R_8 = \{ (x,y) \mid x$ kelipatan y, $x,y \in B \}$.
Dengan demikian $R_8 = \{(2,2),(4,4),(5,5),(4,2)\}$. Relasi R_8 tersebut bersifat antisimetris.

Contoh 17
Diketahui $A = \{ 1, 2, 3 \}$.
Pada A didefinisikan relasi $R_9 = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3) \}$
Relasi R_9 tersebut tidak bersifat antisimetris karena terdapat $(1,2) \in R_9$ dan $(2,1) \in R_9$, tetapi $1 \neq 2$.

RELASI EKIVALEN

Relasi R disebut sebagai sebuah relasi ekivalen jika relasi tersebut bersifat refleksif, simetris dan transitif.

Contoh 18

Diketahui $A = \{ 1, 2, 3 \}$.
Pada A didefinisikan relasi $R_1 = \{ (1,1) , (1,2) , (2,2) , (2,1) , (3,3) \}$
Relasi R_1 tersebut bersifat refleksif, simetris dan transitif. Oleh karena itu relasi R_1 merupakan relasi ekivalen.

Contoh 19

Diketahui $B = \{ 2, 4, 5 \}$. Pada B didefinisikan relasi $R_2 = \{ (x,y) \mid x$ kelipatan $y , x, y \in B \}$ maka $R_2 = \{ (2,2) , (4,4) , (5,5) , (4,2) \}$.
Relasi R_2 tersebut tidak bersifat simetris, oleh karena itu relasi tersebut bukan relasi ekivalen.

RELASI PENGURUTAN SEBAGIAN (*PARTIAL ORDERING*)

Relasi R disebut sebagai sebuah relasi pengurutan sebagian (*partial ordering),* jika relasi tersebut bersifat refleksif, transitif dan antisimetris.

Contoh 20

Diketahui $A = \{ 1, 2, 3 \}$. Pada A didefinisikan relasi $R_3 = \{ (1,1) , (1,2) , (2,2) , (2,1) , (3,3) \}$. Relasi R_3 tersebut bersifat refleksif dan transitif, tetapi tidak bersifat antisimetris. Oleh karena itu relasi tersebut bukan merupakan relasi pengurutan sebagian.

Contoh 21

Diketahui $B = \{ 2, 4, 5 \}$. Pada B didefinisikan relasi $R_4 = \{ (x,y) \mid x$ kelipatan $y , x,y \in B \}$ maka $R_4 = \{ (2,2) , (4,4) , (5,5) , (4,2) \}$.
Relasi R_4 tersebut bersifat refleksif, antisimetris dan transitif. Oleh karena itu relasi tersebut merupakan relasi pengurutan sebagian.

Daftar Referensi

Suryadi, H.S. 1991. Aljabar, Logika dan Himpunan, seri diktat kuliah Gunadarma. Depok.

Pardede, C. 2003. *Lecture Notes* Logika Matematika. Universitas Gunadarma. Depok.